

ÜBUNGSBLATT 5

Abgabe am 21.05.2008 vor der Vorlesung (bis 11.15 Uhr) im Briefkasten
neben dem Raum der Fachschaft (Rud25, Haus 3)

Aufgabe 1. Sei $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q}, & x \in \mathbb{Q}, \text{ mit } x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N} \text{ und teilerfremd,} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

- (a) Ist f eine Regelfunktion?
(b) Ist die Menge der Unstetigkeitsstellen von f eine Nullmenge?

(5 Punkte)

Aufgabe 2. Wir wollen die Cantor-Menge im Intervall $I = [0, 1]$ betrachten. Diese definieren wir induktiv wie folgt: Man nehme aus $[0, 1]$ das mittlere offene Drittel $I_1 := (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ heraus, erhält also das Komplement $C_1 := \gamma I_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ von I_1 . Mit jedem dieser beiden Intervalle $[0, \frac{1}{3}]$ und $[\frac{2}{3}, 1]$ verfähre man nun ebenso, indem man jeweils das mittlere Drittel $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ und $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ herausnehme. Man erhält also $C_2 := [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1] = \gamma(I_1 \cup I_2)$, mit $I_2 := (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. Man erhält man die Cantor-Menge durch

$$C := [0, 1] \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \right).$$

Bestimmen Sie eine induktive Formel für I_n . Beweisen Sie, dass die Cantor-Menge eine Nullmenge ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 3. In der Vorlesung wurden die Funktionen \tilde{B}_k definiert.

- (a) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $t \in (0, 1)$ gilt:

$$\tilde{B}_k(t) = (-1)^k \tilde{B}_k(1-t).$$

- (b) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\tilde{B}_{2k+1}(0) = 0.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 4. Eine offene Teilmenge von \mathbb{R} ist eine Vereinigung abzählbar vieler offener Intervalle. Zeigen Sie, dass eine Regelfunktion auf einer offenen Menge höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen besitzt.
(5 Punkte)

Für weitere Hinweise zur Bearbeitung der Übungsblätter siehe
<http://www.math.hu-berlin.de/~geomanal/analysis2.html>