ÜBUNGSBLATT 10

Abgabe am 25.06.2008 vor der Vorlesung (bis 11.15 Uhr) im Briefkasten
neben dem Raum der Fachschaft (Rud25, Haus 3)

Aufgabe 1. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

- (a) Zeigen Sie, dass ein beliebiger Durchschnitt und eine endliche Vereinigung kompakter Teilmengen von X kompakt sind.
- (b) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X . Zeigen Sie, dass $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n \mid n \geq m\}}$ die Menge der Häufungspunkte von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist.
- (c) Sei X kompakt. Zeigen Sie, dass $U \subset X$ genau dann kompakt ist, wenn U abgeschlossen ist.
- (d) Sei $K \subset X$ kompakt und $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von K durch offene Mengen in X . Zeigen Sie, dass es ein $r > 0$ gibt, sodass jede Kugel $B_r(x)$, $x \in K$ in einer der Mengen U_i liegt.

(8 Punkte)

Aufgabe 2. Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume und $A \subset X$ kompakt sowie $f : X \rightarrow Y$ stetig. Zeigen Sie, dass $f(A)$ kompakt ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 3. Sei (X, d) ein beschränkter metrischer Raum, d.h. es gibt ein $c > 0$ mit $d(x, y) \leq c$ für alle $x, y \in X$. Bezeichne $T(X)$ die Menge aller abgeschlossenen nichtleeren Teilmengen von X . Für $A, B \subset T(X)$ sei $\rho(A, B) := \sup_{x \in A} d(x, B)$ und $h(A, B) := \max\{\rho(A, B), \rho(B, A)\}$. Zeigen Sie:

- (a) h ist eine Metrik auf $T(X)$ (und heißt übrigens 'Hausdorff Abstand').
- (b) Für $A, B, C, D \subset T(X)$ gilt: $h(A \cup B, C \cup D) \leq \max\{h(A, C), h(B, D)\}$
- (c) Ist X vollständig, dann ist auch $T(X)$ vollständig.
- (d) Ist X total beschränkt, dann ist auch $T(X)$ total beschränkt.
- (e) Ist X kompakt, dann ist auch $T(X)$ kompakt.

[Hinweis zu (c): Sei (X_n) eine Cauchyfolge in $T(X)$. Für jedes n sei Y_n die abgeschlossene Hülle der Vereinigung der Mengen X_{n+p} , mit $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Betrachten Sie den Durchschnitt der fallenden Folge (Y_n) .

(9 Punkte)