# Übungen Analysis II* - SS 2008

*Vorlesender*: Prof. Jochen Brüning
*Übungsleiter*: Dr. Jörg Wolf
*Raum*: 1.011

15.April.2008

## 1. Wiederholung Differenzierbarkeit

**1.1 Definition** Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}\,(-\infty \leq a < b \leq \infty)$. Die Funktion $f$ heißt *differenzierbar in* $x \in (a,b)$, falls eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \to a \quad \text{in} \quad \mathbb{R} \quad \text{für} \quad h \to 0.$$

Die Zahl $a$ heißt die *Ableitung von $f$ an der Stelle $x$* und wird mit $f'(x)$ bezeichnet. Die Funktion $f$ heißt differenzierbar in $(a,b)$, falls $f$ in jedem Punkt $x \in (a,b)$ differenzierbar ist. Die Funktion $f'$, welche jedem Punkt $x$ die Ableitung $f'(x)$ zuordnet heißt *erste Ableitung von $f$*. Darüber hinaus heißt $f$ *stetig differenzierbar*, falls $f' : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist.

Ist $f'$ ebenfalls differenzierbar, so heißt ihre Ableitung *die zweite Ableitung von $f$* und wird mit $f''$ bezeichnet. In diesem Fall sagt man: $f$ ist *zweimal differenzierbar*. Mittels vollständiger Induktion definiert man für $n \in \mathbb{N}$ *die n-te Ableitung von $f$*, die mit $f^{(n)}$ bezeichnet wird. Die Funktion $f$ heißt *n mal differenzierbar*, falls alle Ableitungen $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ existieren.

*1.2 Beispiel* Eine stetige nicht differenzierbare Funktion: Wir betrachten die Funktion $f(x) := \left|x - \frac{1}{2}\right| + \frac{1}{2}\,(x \in \mathbb{R})$. Man zeige, dass $f$ im Punkt $\frac{1}{2}$ nicht differenzierbar ist.

*Beweis* Für alle $h > 0$ gilt

$$\frac{f(1/2+h)-f(x)}{h} = 1 \quad \forall h > 0,$$
$$\frac{f(1/2+h)-f(x)}{h} = -1 \quad \forall h < 0.$$

Somit existiert der Grenwert des Differenzenquotienten an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ für $h \to 0$ nicht.

■

*1.3 Beispiel* Eine differenzierbare Funktion, die nicht stetig differenzierbar ist: Wir betrachten die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

Für $x \neq 0$ berechnet man mit den bekannten Ableitungsregeln

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Für $x = 0$ erhält man

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = h \sin\frac{1}{h} \to 0 \quad \text{für} \quad h \to 0.$$

Folglich ist $f$ auch in $x = 0$ differenzierbar und es gilt $f'(0) = 0$.

Die Ableitung $f'$ ist jedoch im Punkt $x = 0$ nicht stetig. Denn setzt man $x_k = \frac{1}{k\pi}$ so ist $\{x_k\}$ eine Nullfolge, doch wegen $f'(x_k) = (-1)^{k+1}$ $(k \in \mathbb{N})$ konvergiert die Folge der Funktionswerte nicht. Somit ist $f'$ in $x = 0$ nicht stetig.

■

## 2. Monotone Funktionen

**2.1** *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nichtfallend, das heißt $f(x) \leq f(y)$ für alle $x \leq y$. Ist $A$ die Menge der Unstetigkeitsstellen von $f$, so gilt* $\operatorname{card}(A) \leq \operatorname{card}(\mathbb{Q})$.

*Beweis* Wir definieren

$$f_-(x) := \lim_{\substack{y \to x \\ y < x}} f(y), \qquad f_+(x) := \lim_{\substack{y \to x \\ y > x}} f(y),$$

Aufgrund der Monotonie von $f$ existieren beide Grenzwerte und es gilt $f_-(x) \leq f(x) \leq f_+(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir zeigen nun, dass

$$A = \{y \in \mathbb{R}; f_-(y) < f_+(y)\}.$$

Ist $x$ eine Unstetigkeitsstelle, dann existiert eine Folge $\{x_k\}$ in $\mathbb{R}$ mit $x_k \to x$ und $f(x_k) \not\to f(x)$ für $k \to \infty$. Wir können OBdA annehmen, dass $x_k < x$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Offensichtlich gilt $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f_-(x)$. Da der Grenzwert nicht mit $f(x)$ überstimmt, haben wir $f_-(x) < f(x) \leq f_+(x)$.

Sei andererseits $x \in \{y \in \mathbb{R}; f_-(y) < f_+(y)\}$. Falls $f_-(x) < f(x)$, so ist leicht zu sehen, dass $f$ in $x$ nicht stetig ist. Gilt andererseits $f_-(x) = f(x)$, so müsste nach Voraussetzung $f(x) < f_+(x)$ gelten. Auch in diesem Fall ist $f$ in $x$ nicht stetig.

Wir konstruieren nun eine injektive Funktion $\phi : A \to \mathbb{Q}$ auf folgende Weise. Sei $x \in A$. Da jedes offene nichtleere Intervall mindestens eine rationale Zahl enthält können wir ein $\phi(x) \in (f_-(x), f_+(x)) \cap \mathbb{Q}$ auswählen. Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass $\phi$ injektiv ist. Hierfür seien $x, x' \in A$ mit $x' < x$ gegeben. Sei $x' < y < x$. Aus der Definition von $f_+(x')$ und $f_-(x)$ und der Monotonie von $f$ folgt $f_+(x') \leq f(y) \leq f_-(x)$. Somit haben wir $\phi(x') < f_+(x') \leq f_-(x) < \phi(x)$, woraus die Injektivität folgt. Aus der Injektivität der Abbildung $\phi$ ergibt sich die Behauptung.

■

## 3. Konvexe Funktionen

**3.1 Definition** Eine Funkiton $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *konvex* falls

(1) $$f((1-\theta)x + \theta y) \leq (1-\theta)f(x) + \theta f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \theta \in [0,1].$$

*3.2. Elementare Ungleichungen.* Subtrahiert man auf beiden Seiten von (1) $f(x)$, so ergibt sich nach Umformung

$$f((1-\theta)x+\theta y)-f(x) \leq \theta(f(y)-f(x)) \quad \forall x,y\in\mathbb{R}, \forall\theta\in[0,1]. \tag{2}$$

*Mit Hilfe von* (2) *zeigt man dass $f$ konvex ist, genau dann wenn*

$$\frac{f(y_1)-f(x_1)}{y_1-x_1} \leq \frac{f(y_2)-f(x_1)}{y_2-x_1} \leq \frac{f(y_2)-f(x_2)}{y_2-x_2} \tag{3}$$

*für alle $x_1 \leq x_2 \leq y_1 \leq y_2$ mit $x_1 < y_1$ und $x_2 < y_2$.*

*Beweis* Wir setzen in (2) $x = x_1$ und $y = y_2$. Dann folgt die erste Ungleichung von (3) aus (2) mit $\theta = \frac{y_1-x_1}{y_2-x_1}$, während die zweite Ungleichung in (3) aus (2) mit $\theta = \frac{x_2-x_1}{y_2-x_1}$ folgt.

■

**3.3** Als unmittelbare Folgerung der Ungleichung (3) ergeben sich die folgenden beiden Ungleichungen

$$\frac{f(x+k)-f(x)}{k} \leq \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \forall -\infty < k < h < +\infty \tag{4}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq \frac{f(x+l)-f(x+h)}{l-h} \quad \forall 0 < h < l. \tag{5}$$

**3.4.** *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe und differenzierbare Funktion. Dann ist $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.*

*Beweis*. Führt man in (5) den Grenzübergang $l \to h$ bei fixiertem $h > 0$ aus, so bekommt man zusammen mit (4)

$$\frac{f(x+k)-f(x)}{k} \leq \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq f'(x+h) \quad \forall x\in\mathbb{R}, \forall 0<k<h.$$

Auf der anderen Seite folgt aus (4) nach Ausführung des Grenzübergangs $k \to 0$

$$f'(x) \leq \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq f'(x+h) \quad \forall x\in\mathbb{R}, h>0.$$

Ersetzt man in dieser Ungleichung $x$ durch $x+h$ und $h$ durch $h+k$ für ein $k > 0$, so erhält man aufgrund der Stetigkeit von $f$

$$f'(x) \leq \lim_{h\to 0^+} f'(x+h) \leq \frac{f(x+k)-f(x)}{k} \quad \forall k>0.$$

Da $f$ differenzierbar ist, folgt aus der letzten Ungleichung $\lim_{h\to 0^+} f'(x+h) = f'(x)$. Analog zeigt man $\lim_{h\to 0^-} f'(x+h) = f'(x)$, was die behauptete Stetigkeit von $f'$ beweist.

■

**3.5.** *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Ist $A$ die Menge all derjenigen $x \in \mathbb{R}$ in denen $f$ nicht differenzierbar ist, so gilt* $\operatorname{card}(A) \leq \operatorname{card}(\mathbb{Q})$. *Mit anderen Worten, eine konvexe Funktion ist bis auf eine höchstens abzählbare Menge überall differenzierbar.*

*Beweis*. Wir gehen beim Beweis ähnlich vor wie bei 2.1. Wir definieren

$$f'_-(x) := \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad f'_+(x) := \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aufgrund der Monotonieungleichung (4) existieren beide Grenzwerte, so dass die Funktionen $f'_-$ und $f'_+$ wohl definiert sind. Ebenfalls mit Hilfe von (4) macht man sich klar, dass sowohl $f'_-$ als auch $f'_+$ nichtfallend sind. Außerdem gilt $f'_-(x) \leq f'_+(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Demzufolge ist $f$ in $x$ nicht differenzierbar genau dann wenn $f'_-(x) < f'_+(x)$. Wegen $f'_+(x) \leq f'_-(y)$ für alle $x < y$ können wir wie in 2.1. eine injektive Abbildung $\phi : A \to \mathbb{Q}$ finden, wobei $\phi(x) \in (f'_-(x), f'_+(x))$ für $x \in A$. Somit ist $A$ höchstens abzählbar.

■