Übungen Analysis II* - SS 2008

Vorlesender: Prof. Dr. Jochen Brüning
Übungsleiter: Dr. Jörg Wolf
Raum: 1.011

8. Juli. 2008

21. Differenzierbarkeit

21.4 *Sei H ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Die Norm in H ist dann gegeben durch $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$. Bekanntlich gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\| \quad \forall x,y \in H.$$

Wir betrachten die Abbildung $f : H \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \|x\|, x \in H$. Dann ist f in jedem Punkt $x \in H \setminus \{0\}$ differenzierbar und es gilt

$$Df(x)(h) = \frac{\langle x,h\rangle}{\|h\|} \quad \forall h \in H.$$

Beweis Sei $x \in H \setminus \{0\}$. Zunaächts betrachten wir die Abbildung $g = f^2 = \|\cdot\|^2$. Für die Richtungsableitung von g bekommt man

$$\frac{\partial g}{\partial h}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\|x+th\|^2 - \|x\|^2}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{2t\langle x,h\rangle + t^2\|h\|^2}{t} = 2\langle x,h\rangle.$$

Wir zeigen g ist differnzierbar in x mit $Dg(x)(h) = 2\langle x,h\rangle$. In der Tat, erhält man

$$\frac{|\|x+h\|^2 - \|x\|^2 - 2\langle x,h\rangle|}{\|h\|} = \frac{\|h\|^2}{\|h\|} \to 0 \quad \text{für} \quad \|h\| \to 0.$$

Sei $h \in H$. Wir setzen $\phi(t) := \|x+th\| = \sqrt{g(x+th)}$. Mit Hilfe der Kettenregel ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) = \phi'(0) = \frac{1}{2\|x\|}\frac{\partial g}{\partial h}(x) = \frac{\langle x,h\rangle}{\|x\|}.$$

Es bleibt noch zu die Differenzierbarkeit zu zeigen. Für $h \in H$ bekommt man

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h) - f(x) - \frac{\langle x,h\rangle}{\|x\|}}{\|h\|} &= \frac{g(x+h) - g(x)}{(f(x+h) + f(x))\|h\|} - \frac{\langle x,h\rangle}{\|x\|\|h\|} \\
&= \frac{2\langle x,h\rangle + \|h\|^2}{(\|x+h\| + \|x\|)\|h\|} - \frac{\langle x,h\rangle}{\|x\|\|h\|} \\
&= \frac{\langle x,h\rangle(\|x\| - \|x+h\|)}{(\|x+h\| + \|x\|)\|x\|\|h\|} + \frac{\|h\|}{\|x+h\| + \|x\|}
\end{aligned}$$

Beachtet man $|\|x\| - \|x+h\|| \leq \|h\|$, so ergibt sich unter Verwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\frac{\left| f(x+h) - f(x) - \frac{\langle x,h\rangle}{\|x\|}\right|}{\|h\|} \leq \frac{|\langle x,h\rangle|\|h\|}{(\|x+h\|+\|x\|)\|x\|\|h\|} + \frac{\|h\|}{\|x+h\|+\|x\|} \leq \frac{2\|h\|}{(\|x+h\|+\|x\|)}$$

Die rechte Seite konvergiert offensichtlich gegen 0 für $\|h\| \to 0$.
Die zweite Ableitung. Die erste Ableitung Df bildet von $H \setminus \{0\}$ in $Y = \mathscr{L}(H,\mathbb{R})$ ab. Für die zweite Ableitung haben wir somit

$$D^2 f \in \mathscr{L}(H, \mathscr{L}(H,\mathbb{R})) \cong \mathscr{L}^2(H \times H, \mathbb{R}).$$

Für die zweiten Ableitungen berechnet man

$$\begin{aligned} D^2 f(h,k) &= \lim_{t\to 0} \frac{Df(x+tk)(h) - Df(x)(h)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\langle x+tk,h\rangle}{\|x+tk\|} - \frac{\langle x,h\rangle}{\|x\|}}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\langle x,h\rangle(\|x\| - \|x+tk\|)}{t\|x\|\|x+tk\|} + \lim_{t\to 0} \frac{\langle k,h\rangle}{\|x+tk\|} \\ &= \frac{\langle h,k\rangle}{\|x\|} - \frac{\langle x,h\rangle\langle x,k\rangle}{\|x\|^3} \end{aligned}$$

für alle $h,k \in H$. Wegen $D^2 f(x)(h,h) = \frac{\|h\|^2\|x\|^2 - \langle x,h\rangle^2}{\|x\|^3} \geq 0$ ist $D^2 f(x)$ nichtnegativ für alle $x \in H \setminus \{0\}$, also f konvex. [1)]

■

21. 5 Sei $X = c_0 := \{x = (x_k) \subset \mathbb{R} \mid \lim_{k\to\infty} x_k = 0\}$, versehen mit der Norm

$$\|x\| := \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|, \quad x \in X.$$

Wir betrachten die Abbildung $f(x) := \|x\|, x \in X$. In welchen Punkten ist f differenzierbar? Wir nehmen an, f ist in $x \in X$ differenzierbar. Wir definieren $S := \{k \in \mathbb{N} \mid |x_k| = \|x\|\}$. Da (x_k) eine Nullfolge ist, gilt $S \neq \emptyset$. Wir berechnen nun die Richtungsableitungen in Richtung $e_k = (0,\dots,0,1,0,\dots)$ (die 1 an der k-ten Stelle). Falls $k \in S$ mit $x_k = \|x\|$ so bekommt man für $t > 0$

$$\frac{\|x+te_k\| - \|x\|}{t} = \frac{x_k + t - x_k}{t} = 1.$$

Nach Voraussetzung existiert die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial e_k}(x) = 1$. Demzufolge gilt

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{\|x+te_k\| - \|x\|}{t} = 1.$$

[1)] Setzt man $\phi(t) := f(x+th)$, so bekommt man $\phi''(0) = D^2 f(x)(h,h) \geq 0$. Somit ist ϕ konvex für jedes $x,h \in H, x \neq 0$. Hieraus folgert man, dass f konvex ist.

Das heißt es existiert $t < 0$, so dass $\|x+te_k\| < \|x\| = x_k$. Dies impliziert $|x_l| < x_k$ für alle $l \neq k$, da sonst $\|x+te_k\| = \|x\|$ gelten würde. Analog zeigt man im Falle $\|x\| = -x_k$, dass $|x_l| < -x_k$ für alle $l \neq k$. Somit ist f in x differenzierbar nur dann wenn S genau einem Element besitzt.

Sei nun $x \in X$, so dass $\|x\| = |x_k|$ für genau ein $k \in \mathbb{N}$. Wir berechnen nun die Richtungsableitungen von f in x in Richtung e_l $(l \in \mathbb{N})$. Falls $l = k$, so bekommt man leicht

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x+te_k\| - \|x\|}{t} = \operatorname{sign}(x_k).$$

Ist $l \neq k$, so gibt es wegen $|x_l| < \|x\|$ ein $\varepsilon > 0$, so dass $|x_l + t| \leq \|x\|$ für alle $|t| \leq \varepsilon$, also $\|x+te_l\| = \|x\|$ für alle $|t| \leq \varepsilon$. Dies impliziert $\frac{\partial f}{\partial e_l}(x) = 0$. Ist f in x differenzierbar, so gilt

$$Df(x)(h) = \operatorname{sign}(x_k)h_k, \quad h \in X.$$

Wir zeigen nun dass tatsächlich f in jedem Punkt x mit $\|x\| = |x_k|$ für genau ein $k \in \mathbb{N}$ differenzierbar ist. Da (x_i) eine Nullfolge ist, gibt es ein $l_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|x_l| < \frac{1}{2}\|x\|$ für alle $l \geq l_0$. Dann existiert ein $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\|x\|$, so dass $|x_l| \leq \|x\| - \varepsilon$ für alle $l \in \{1,\ldots,l_0\} \setminus \{k\}$. Folglich

$$|x_l| \leq \|x\| - \varepsilon \quad \forall l \in \mathbb{N}, l \neq k.$$

Nun sei $h \in X$ mit $\|h\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Dann $|x_l + h_l| \leq |x_l| + |h_l| \leq \|x\| - \frac{\varepsilon}{2}$ für $l \neq k$ und $|x_k + h_k| \geq \|x\| - \frac{\varepsilon}{2}$. Also $\|x+h\| = |x_k + h_k|$. Hiermit erhält man

$$\frac{\|x+h\| - \|x\| - \operatorname{sign}(x_k)h_k}{\|h\|} = \frac{|x_k+h_k| - |x_k| - \operatorname{sign}(x_k)h_k}{\|h\|} = 0,$$

was die Differenzierbarkeit von f in x zeigt.

■

21.6 *Sei X ein normierter Raum. Sei $U \subseteq X$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}$. Überdies sei $x_0 \in X$ mit*

$$f(x_0) = \min_{x\in X} f(x).$$

Existieren die Richtungsableitungen $\frac{\partial f}{\partial h}(x_0)$ für jedes $h \in X$, so gilt

$$\frac{\partial u}{\partial h}(x_0) = 0 \quad \forall h \in X.$$

Ist außerdem f in x_0 differenzierbar, so gilt $Df(x_0) = 0$.

Beweis Nach Voraussetzung existiert ein $r > 0$, so dass $B_r(x_0) \subseteq U$. Sei $h \in X \setminus \{0\}$ und $R := \frac{r}{\|h\|}$. Definieren $\phi(t) := f(x_0+th)$ für $t \in (-R,R)$. Dann nimmt ϕ in 0 ihr Minimum an. Auf der anderen Seite ist ϕ in 0 differenzierbar und es gilt

$$\phi'(0) = \frac{\partial f}{\partial h}(x_0) = 0.$$

■

21.7 (**Satz von Rolle**) *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $f : \overline{U} \to \mathbb{R}$ stetig und in U differenzierbar mit $f|\partial U = 0$. Dann existiert ein $x_0 \in U$ mit $Df(x_0) = 0$.*

Beweis Da U beschränkt ist, folgt $\overline{U}$ ist kompakt. Somit nimmt f ihr Minimum bei $x_1 \in \overline{U}$und ihr Maximum bei $x_2 = \overline{U}$ an. Falls $x_1 \in \partial U$ und $x_2 \in \partial U$, so wäre $f \equiv 0$, also $Df(x) = 0$ für alle $x \in U$. Falls $x_1 \in U$, so ergibt sich nach 21.6 $Df(x_1) = 0$ und falls $x_2 \in U$, so ergibt sich nach 21.6 $Df(x_2) = 0$, womit die Behauptung bewiesen ist.

■