Übungen Analysis II* - SS 2008

Vorlesender: Prof. Dr. Jochen Brüning
Übungsleiter: Dr. Jörg Wolf
Raum: 1.011

22.April.2008

4. Glatte Funktionen

4.1. Beispiel Wir betrachen die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & \text{für} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{für} \quad |x| \geq 1. \end{cases}$$

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist beliebig oft differenzierbar.

Beweis Wir setzen $\eta(x) := \frac{1}{1-x^2}$ für $-1 < x < 1$. Elementar berechnet man

$$\eta'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2} = 2x\eta^2(x).$$

Für $x \in (-1,1)$ haben wir $f(x) = e^{-\eta(x)}$. Mit Hilfe der Kettenregel berechnet man $f'(x) = -2x\eta^2(x)f(x)$ für $x \in (-1,1)$. Weiterhin berechnet man mit Hilfe der Produkt- und Kettenregel

$$f''(x) = (-2\eta^2(x) - 8x^2\eta^3(x) + 4x^2\eta^4(x))f(x), \quad x \in (-1,1).$$

Mittels vollständiger Induktion zeigt man, dass f in $(-1,1)$ beliebig oft differenzierbar ist. Man sieht außerdem dass sich die n-te Ableitung $f^{(n)}$ folgendermaßen darstelen lässt.

$$f^{(n)}(x) = (p_1(x)\eta^1(x) + \ldots + p_{2n}(x)\eta^{2n}(x))f(x), \quad x \in (-1,1),$$

wobei $p_j\,(j = 1,\ldots,2n)$ Polynome vom Grad $\leq n$ sind. Um die Stetigkeit der Ableitung zu prüfen genügt zu zeigen, dass

$$f^{(n)}(x) \to 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R} \quad \text{für} \quad |x| \to 1.$$

Aufgrund der Symmetrieeigenschaft $\eta(x) = \eta(-x)$, genügt es, den Grenzwert für $x \to 1$ zu betrachten. Offensichtlich folgt diese Aussage, falls für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\eta^m(x)e^{-\eta(x)} \to 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R} \quad \text{für} \quad x \to 1.$$

Beachtet man $\eta^m e^{-\eta} = \frac{\eta^m}{e^\eta} \leq \frac{(m+1)!}{\eta} \to 0$ für $\eta \to \infty$. Somit folgt die obige Konvergenzeigenschaft wegen $\eta(x) \to \infty$ für $x \to 1$.

■

5. Elementare Ungleichungen

5.1. *Es gilt* $\ln(x+1) \le x$ *für alle* $x \ge 0$.

Beweis Unter Verwendung des Mittelwertsatzes bekommt man

$$\ln(x+1)) = \ln(x+1) - \ln(0+1) = \frac{1}{\theta x+1}(x-0) = \frac{x}{\theta x+1}$$

für ein $\theta \in [0,1]$. Wegen $\frac{x}{\theta x+1} \le x$ ergibt sich die Behauptung.

■

5.2. *Seien* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}_+ \, (-\infty \le a < b \le \infty)$ *stetig und in* (a,b) *differenzierbar mit* $f(b) > 0$ *und*

$$g(b)f'(x) \le f(b)g'(x) \quad \forall x \in (a,b).$$

Dann gilt $\frac{f(x)}{g(x)} \ge \frac{f(b)}{g(b)}$ *für alle* $x \in (a,b)$.

Beweis Wir setzen $u = g(b)f$ und $v = f(b)g$. Nach der Voraussetzung gilt $u' \le v'$. Somit ist die Funktion $u - v$ nichtwachsend. Demzufolge gilt für $x \in (a,b)$

$$g(b)f(x) - f(b)g(x) = u(x) - u(x) \ge u(b) - v(b) = 0,$$

was äquivalent zur Behauptung ist.

■

5.3. *Es gilt die Ungleichung*

$$1 - \cos x \ge \frac{2x^2}{\pi^2} \quad \forall 0 \le x \le \pi.$$

Beweis Wir definieren die Funktion

$$\phi(x) := 1 - \cos x - \frac{2x^2}{\pi^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die Behauptung ist somit äquivalent zu $\phi(x) \ge 0$ für alle $x \in [0,\pi]$. Wegen $\phi(0) = \phi(\pi) = 0$, genügt es zu zeigen, dass ϕ in $(0,\pi)$ kein lokales Minimum hat. Um dies zu zeigen benutzen wir ϕ' und ϕ'', wobei

$$\phi'(x) = \sin x - \frac{4x}{\pi^2}, \quad \phi''(x) = \cos x - \frac{4}{\pi^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Es ist leicht zu verifizieren, dass ϕ'' in $(0,\pi)$ strikt fallend ist. Außerdem sieht man leicht, dass $\phi''(\pi) < 0 < \phi''(0)$. Nach dem Zwischenwertsatz und der Monotonie existiert genau ein $x_0 \in (0,\pi)$ mit $\phi''(x_0) = 0$, so dass

$$\phi''(x) > 0 \quad \text{in} \quad [0,x_0), \qquad \phi''(x) < 0 \quad \text{in} \quad (x_0,\pi],$$

Insbesondere ist ϕ' im Intervall $[0,x_0)$ strikt wachend. Wegen $\phi'(0)=0$ folgt also $\phi'(x)>0$ für alle $x\in(0,x_0]$. Somit liegt ein mögliches Extrema höchstens in (x_0,π). Da aber $\phi''<0$ in (x_0,π), kann dieses Intervall kein lokales Minimum von ϕ enthalten.

■

5.4. *Es gilt die Ungleichung*

$$\ln(n+1) \leq 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} \leq 1+\ln n \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Beweis Unter Verwendung des Mittelwertsatzes bekommt man $\ln(n+1)-\ln n = \frac{1}{n+\theta}$ für ein $\theta\in[0,1]$. Dies impliziert

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1)-\ln n \leq \frac{1}{n} \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Wendet man diese Ungleichung iterativ an, so erhält man

$$\begin{aligned}
\ln(n+1) &= \ln(n+1)-\ln 1 \\
&= (\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\ldots+\ln(n+1)-\ln n \\
&\leq 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Analog bekommt man

$$\begin{aligned}
1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} &\leq 1+(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\ldots+\ln(n-1)-\ln n \\
&= 1+\ln n.
\end{aligned}$$

■

5.5. *Für beliebiges* $\alpha>0$ *gilt die Ungleichung*

$$\ln x \leq \frac{x^\alpha}{\alpha e} \quad \forall x>0.$$

Beweis. Wir betrachten nun die Funktion $h(x)=x^{-\alpha}\ln x$. Unter Verwendung der Produktregel berechnet man

$$h'(x) = x^{-\alpha-1}(1-\alpha\ln x), \quad h''(x) = -x^{-\alpha-2}(1+2\alpha+\ln x).$$

Die Funktion h' hat genau eine Nullstelle bei $x_0=e^{1/\alpha}\in(1,\infty)$. Wegen $h''(x_0)<0$ hat h in x_0 ein lokales Maximum. Da die Funktion h keine weiteren Extrema besitzt, liegt bei $x_0=e^{1/\alpha}$ ein globales Maximum vor. Somit gilt $h(x)\leq h(e^{1/\alpha})=\frac{1}{\alpha e}$ für alle $x>0$. Hieraus folgt die Behauptung.

■

5.6. Bemerkung Setzt man in 5.5 insbesondere $\alpha=\frac{1}{2}$, so ergibt sich

$$\frac{\ln x}{x} \leq \frac{2}{e\sqrt{x}} \quad \forall x>0,$$

was zeigt, dass $\frac{\ln x}{x} \to 0$ für $x \to \infty$.

∎

6. Potenzreihen und Taylorreihen

6.1. Definition Seien $\{a_n; n = 0, 1, \ldots\}$ Koeffizienten in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann heißt

$$P(z_0; z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in \mathbb{C}$$

Potenzreihe in $\mathbb{C}$ um den Punkt z_0. Bekanntlich konvergiert $P(z_0; \cdot)$ für jedes $z \in B(z_0, R)$, wobei $R > 0$ den *Konvergenzradius* bezeichne, der gegeben ist durch

$$\frac{1}{R} := \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}.$$

Darüber hinaus konvergiert die Potenzreihe P auf jeder Kreisscheibe $B(z_0, \rho)$ mit $0 < \rho < R$ gleichmäßig. Außerhalb des Konvergenzbereiches $\{z \in \mathbb{C}; |z| > R\}$ konvergiert die Potenzreihe P nicht. Auf dem Rand der Konvergenzkreisscheibe kann sowohl Konvergenz, als auch Divergenz auftreten.

Potenzreihen mit Konvergenzradius $R = \infty$ heißen *ganze Funktionen*.

6.2. Bemerkung Sind $\{a_k\}$ reellwertige Koeffizienten und ist $z_0 = x_0 \in \mathbb{R}$, so ist die Einschränkung der Potenzreihe P auf die reellen Zahlen

$$P(x_0; x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad x \in \mathbb{R}$$

eine Potenzreihe in $\mathbb{R}$. Konvergenzradius und Konvergenzverhalten ist für Potenzreihen in $\mathbb{R}$ äquivalent zu Potenzreihen in $\mathbb{C}$. Insbesondere kann jede Potenzreihe in $\mathbb{R}$ auch als Potenzreihe in $\mathbb{C}$ aufgefasst werden.

∎

6.3. Beispiel 1) *Die geometrische Reihe.* Für $n \in \mathbb{N}$ bekommt man

$$\begin{aligned}(1 + x + x^2 + \ldots x^{n-1})(x - 1) &= x(1 + x + \ldots x^{n-1}) - (1 + x + + \ldots x^{n-1}) \\ &= (x + \ldots x^{n-1}) + x^n - 1 - (x + \ldots x^{n-1}) \\ &= x^n - 1.\end{aligned}$$

Hieraus schließt man

$$s_n(x) = \sum_{n=0}^{n-1} x^k = \frac{x^n - 1}{x - 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Offensichlich konvergiert $s_n(x)$ gegen $\frac{1}{1-x}$ für $n \to \infty$ genau dann, wenn $|x| < 1$. Wir erhalten somit die Potentreihe

$$P(0; x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}, \quad |x| < 1.$$

wobein der Konvergenzradius $R = 1$ beträgt.
2) *Die Exponentialfunktion.* Aus Analysis I* ist bekannt, dass die Exponetialfunktion e^x die folgende Reihendarstellung besitzt

$$e^x = P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Demnach wird e^x durch die Potenzreihe $P(0;x)$ mit den Koeffizienten $a_n = \frac{1}{n!}$ dargestellt. Für den Konvergenzradius erhält man

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} := \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n} &\overset{(\mathrm{GM}\le\mathrm{AM})}{\le} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \\ &\overset{(5.4)}{\le} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{n} \overset{(5.6)}{=} 0.\end{aligned}$$

Folglich ist $R = +\infty$ und e^x ist eine ganze Funktion.

Alternativ schließt man wegen $n! \ge \frac{n}{2} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \ldots \cdot n \ge \left(\frac{n}{2}\right)^{n/2}$,

$$\left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n} \le \left(\frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2}}\right)^{1/n} = \left(\frac{2}{n}\right)^{1/2} \to 0$$

für $n \to \infty$.

■

6.4. Definition Sei $f : (a-R, a+R) \to \mathbb{R}\,(a, R \in \mathbb{R}, R > 0)$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Dann heißt

$$T(x) = T_f(a;x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad x \in (a-R, a+R)$$

die zu f gehörige *Taylorreihe* bezüglich $a \in \mathbb{R}$. Die Zahl a heißt hierbei *Entwicklungsstelle*. Sei $n \in \mathbb{N}$. Ist die Funktion f n-mal differenzierbar, so heißt

$$T_n(x) = T_{f,n}(a;x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

das *n-te Taylorpolynom* von f bezüglich der Entwicklungsstelle a. In diesem Fall hat f die Darstellung

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \quad x \in (a-R, a+R).$$

wobei $R_n(x) = R_{f,n}(a;x)$ das *n-te Restglied* bezüglich der Entwicklungsstelle a heißt.

6.5. Bemerkung Ist f außerdem $(n+1)$-mal differenzierbar, so hat das Restglied R_n die folgende Darstellung

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt, \quad x \in (a-R, a+R).$$

Weitere mögliche Restglieddarstellungen sind die folgenden

- DIE LAGRANGESCHE DARSTELLUNG:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{für ein} \quad \theta \in [0,1].$$

- DIE SCHLÖMILCHSCHE DARSTELLUNG:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{p \cdot n!}(1-\theta)^{n+1-p}(x-a)^{n+1} \quad \text{für ein} \quad \theta \in [0,1],$$

  wobei $1 \leq p \leq n+1$.

Wendet man die Schlömilchsche Darstellung mit $p = 1$ an, so ergibt sich die sogenannte CAUCHYSCHE DARSTELLUNG

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{n!}(1-\theta)^{n}(x-a)^{n+1} \quad \text{für ein} \quad \theta \in [0,1].$$

Es sei außerdem bemerkt, dass aus der Schlömilchschen Darstellung mit $p = n+1$ die Lagrangesche Darstellung folgt.

■

6.6. Beispiel Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{1}{3-x}$ für $x \in (-\infty, 3)$. Wir entwickeln f in $a = 1$. Hierfür berechnet man

$$f'(x) = (3-x)^{-2}, \quad f''(x) = 2(3-x)^{-3}, \ldots, f^{(n)}(x) = n!(3-x)^{-n-1}.$$

Für $a = 1$ folgt $f^{(n)}(1) = n!2^{-(n+1)}$. Die Taylorreihe zu f lautet also

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(n+1)}(x-1)^n.$$

Für den Konvergenzradius errechnet man

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty}(2^{-(n+1)})^{1/n} = \lim_{n\to\infty} 2^{-1-1/n} = \frac{1}{2}.$$

Also gilt $R = 2$. Aus der Lagrangeschen Darstellung ergibt sich

$$\begin{aligned} f(x) &= T_n(x) + R_n(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} 2^{-(k+1)}(x-1)^k + (2-\theta(x-1))^{-n-2}(x-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Wegen $2-\theta(x-1) \geq \min\{3-x, 2\}$ für alle $x \in [-1,3)$ und $\theta \in [0,1]$ können wir das Restglied wiefolgt abschätzen

$$R_n(x) = \frac{1}{2-\theta(x-1)}\left(\frac{x-1}{2-\theta(x-1)}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{\min\{2, 3-x\}}\left(\frac{|x-1|}{2-\theta(x-1)}\right)^{n+1}$$

Falls $1 \le x < 2$, so haben wir $\frac{|x-1|}{2-\theta(x-1)} \le \frac{x-1}{3-x} < 1$ und für $-1 < x < 1$ haben wir $\frac{|x-1|}{2-\theta(x-1)} \le \frac{1-x}{2} < 1$. Hiermit folgert man

$$R_n(x) \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty \quad \forall x \in (-1,2).$$

Wir sehen daher, dass das Lagrangsche Restglied eine zu grobe Abschätzung liefert, da man für den Bereich $2 \le x < 3$ keine Konvergenzaussage treffen kann. Eine bessere Abschätzung liefert dahingegen die Cauchysche Darstellung. Mit dieser erhält man

$$R_n(x) = \frac{n+1}{(2-\theta(x-1))^{n+2}}(1-\theta)^{n+1}(x-1)^{n+1} = \frac{(n+1)(x-1)}{2-\theta(x-1)}\left(\frac{(x-1)(1-\theta)}{2-\theta(x-1)}\right)^{n+1}.$$

Für $1 \le x < 3$ kekommt man $\frac{(x-1)(1-\theta)}{2-\theta(x-1)} < \frac{(x-1)(1-\theta)}{2-2\theta} = \frac{x-1}{2} < 1$ und $\frac{(n+1)(x-1)}{2-\theta(x-1)} \le \frac{(n+1)(x-1)}{3-x}$. Dies liefert die Restgliedabschätzung

$$|R_n(x)| \le \frac{(n+1)(x-1)}{3-x}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{-(n+1)} \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Für $-1 \le x < 1$ erhält man $\frac{|x-1|(1-\theta)}{2-\theta(x-1)} < \frac{(1-x)(1-\theta)}{2+2\theta} \le \frac{1-x}{2}$ und $\frac{(n+1)(|x-1|)}{2-\theta(x-1)} \le (n+1)$. Die liefert die Restgliedabschätzung

$$|R_n(x)| \le (n+1)\left(\frac{1-x}{2}\right)^{-(n+1)} \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

6.7. Beispiel $f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ wird entwickelt bei $a = 0$. Es gilt $f'(x) = \sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ und $f''(x) = f(x)$. Hiermit berechnet man

$$f^{(2k)}(x) = \cosh(x), \quad f^{(2k+1)}(x) = \sinh(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Dann folgt $f^{(2k)}(0) = 1$ und $f^{(2k+1)}(0) = 0$ für $k \in \mathbb{N}$. Wir erhalten also die Taylorreihe

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}x^{2k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Der Konvergenzradius ist $R = \infty$. Die Taylorformel mit Lagrangescher Darstellung lautet für $n = 2m$

$$f(x) = T_{2m}(x) + R_{2m}(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + \frac{\sinh(\theta x)}{(2m+1)!}x^{2m+1}.$$

Für die Restgliedabschätzung erhalten wir

$$|R_{2m}(x)| \le \frac{e^{|\theta x|}|x|^{2m+1}}{2(2m+1)!} = \frac{e^{|x|}|x|^{2m}}{(2m)!}\frac{|x|}{2(2m+1)} \le \frac{e^{2|x|}}{2(2m+1)}.$$

■