Übungen Analysis II* - SS 2008

Vorlesender: Prof. Dr. Jochen Brüning
Übungsleiter: Dr. Jörg Wolf
Raum: 1.011

29.April.2008

7. Hilberträume

7.1 Definition Sei V eine Vektorraum. Eine bilineare Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt *Skalarprodukt* auf V, falls

$$\text{(i)} \quad \langle x,x\rangle > 0 \quad \forall x \in V \setminus \{0\}, \qquad \text{(ii)} \qquad \langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle \quad \forall x,y \in V.$$

Das Paar $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißt *Prä-Hilbertraum.*

7.2 *Die Funktion* $|x| := \sqrt{\langle x,x\rangle}, x \in V$, *definiert eine Norm auf* V.

Beweis Offensichtlich ist $|0| = 0$ und $|x| > 0$ für alle $x \in V \setminus \{0\}$. Außerdem haben wir $|\lambda x| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = |\lambda||x|$. Die Dreiecksungleichung folgt aus

$$\begin{aligned} |x+y|^2 = \langle x+y, x+y\rangle &= |x|^2 + 2\langle x,y\rangle + |y|^2 \overset{\text{ÜA}}{\leq} |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \\ &= (|x|+|y|)^2. \end{aligned}$$

■

8. Stammfunktion

8.1 Definition Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Eine differenzierbare Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* von f, falls $F' = f$. Wir nennen F auch das *unbestimmte Integral* von f, welches mit $\int f dx$ bezeichnet wird. Es sei darauf hingewiesen, dass dieses Integral bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist.

Für $a < c < d < b$ definieren wir das *bestimmte Integral* von f über $[c,d]$ gemäß

$$\int_c^d f(x)dx = F(d) - F(c).$$

Anstelle von $F(d) - F(c)$ schreibt man auch $F(x)|_c^d$. Das bestimmte Integral ist eindeutig festgelegt.

8.2 Bemerkung Ist f eine positive Funktion, so liefert das bestimmte Integral $\int_c^d f(x)dx$ den Inhalt der Fläche, welche begrenzt wird durch den Graphen von f und den Geraden $x = c, x = d, y = 0$.

8.3 Beispiele 1) Die Potenzfunktion $f(x) = x^\alpha, \quad (x > 0, \alpha \neq -1)$. Die Stammfunktion zu f lautet

$$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad x > 0.$$

2) Die Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x}$ lautet $F(x) = \ln(x)$.
3) Die Exponentialfunktion $f(x) = a^x \, (a > 0)$. Die Stammfunktion zu f lautet

$$F(x) = \frac{1}{\ln a} a^x, \quad x > 0.$$

4) Die Logarithmusfunktion $f(x) = \ln x \quad (x > 0)$. Die Stammfunktion von f ist

$$F(x) = x(\ln x - 1), \quad x > 0.$$

5) Die Trigonometrischen Funktionen

$$\int \sin x dx = -\cos x, \quad \int \cos x dx = \sin x, \quad \int \tan x dx = -\ln(\cos x)$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x$$

6) Hyperbelfunktionen

$$\int \sinh x dx = \cosh x, \quad \int \cosh x dx = \sinh x$$

8.4 Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann*

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a) \quad \forall -\infty < a < b < \infty.$$

Beweis Setzt man $g(x) = f'(x)$, so ist trivialerweise $G(x) = f(x)$ eine Stammfunktion von g. Die Aussage des Satzes folgt nun unmittelbar aus $\int_a^b g(x)dx = G(a) - G(b)$.

■

8.5 Prinzip der partiellen Integration *Seien f, g differenzierbar. Dann gilt*

$$\int f'g + fg' dx = fg, \quad \textit{bzw.} \quad \int f'g dx = fg - \int fg' dx$$

Das heißt, eine Stammfunktion von $f'g + fg'$ ist die Funktion fg. Für das bestimmte Integral bekommt man

$$\int_a^b f'(x)g(x) + f(x)g'(x) dx = fg|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Beweis Mit Hilfe der Produktregel folgt $(fg)' = f'g = fg'$. Dies liefert die erste Behauptung. Die zweite Behauptung folgt unmittelbar aus dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung.

$\blacksquare$

8.6 Beispiele 1) Sei $f(x) = x^2e^x$. Dann gilt $x^2e^x = x^2(e^x)'$. Somit

$$\int f dx = \int x^2(e^x)'dx = x^2e^x - \int (x^2)'e^x dx = x^2e^x - 2\int xe^x dx$$

Analog folgt aus $xe^x = x(e^x)'$

$$-2\int x(e^x)'dx = -2xe^x + 2\int e^x dx = -2xe^x + 2e^x.$$

Dies liefert

$$\int f dx = (x^2 - 2x + 2)e^x.$$

2) Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sin^2 x$. Dann haben wir $f(x) = -\sin x\,(\cos x)'$. Also

$$\begin{aligned}\int f dx &= -\int \sin x(\cos x)'dx = -\sin x\cos x + \int (\sin x)'\cos x dx\\ &= -\sin x\cos x + \int \cos^2 x dx\end{aligned}$$

Wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ folgt $\cos^2 x = 1 - f(x)$. Hiermit ergibt sich

$$\int f dx = -\sin x\cos x + \int 1 - f dx = -\sin x\cos x + x - \int f dx.$$

Nach Auflösen bekommt man

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x).$$

8.7 Substitutionsregel Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Sei $g : [c,d] \to [a,b]$ differenzierbar und strikt monoton. Dann ist $(f\circ g)g' : [c,d] \to \mathbb{R}$ integrierbar und es gilt

$$\int f(x)dx = \int f(g(y))g'(y)dy.$$

Die Substitutionsregel wurde hier wie folgt angewandt:

$$x = g(y), \qquad dx = dg = g'(y)dy.$$

8.8 Beispiele 1) Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Wir verwenden die Substitution

$$x = g(y) = \tan y, \qquad dx = dg = \frac{1}{\cos^2 y}dy.$$

Wegen $1+x^2 = 1+\tan^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}$ erhält man

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \int \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} \frac{1}{\cos^2 y}dy = \int dy = y = \arctan x.$$

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Wir verwenden die Substitution

$$y = h(x) = x^2, \qquad dy = dh = h'(x)dx = 2xdx.$$

Man erhält $\frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\frac{dy}{1+y}$ und hiermit

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{1+y} = \frac{1}{2}\ln|1+y| = \frac{1}{2}\ln|1+x^2|.$$

8.9 Partialbruchzerlegung Um gebrochen rationale Funktionen zu integrieren, benutzt man die sogenannte Partialbruchzerlegung. Wir betrachten zunächst eine Funktion

$$f(x) = \frac{1}{(x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)}, \quad x \neq a_i.$$

Der Ansatz der Partialbruchzerlegung lautet hierbei

$$f(x) = \frac{A_1}{x-a_1} + \ldots + \frac{A_n}{x-a_n}, \quad A_i = \text{const}.$$

Dies führt zu einem linaren Gleichungssystem der Form

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für das Integral von f erhält man

$$\int f dx = A_1 \ln|x-a_1| + \ldots + A_n \ln|x-a_n|.$$

8.10 Beispiele 1) Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$. Wir machen den Ansatz

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} = \frac{(A_1+A_2)x + A_1 - A_2}{(x-1)(x+1)}$$

Aus dem Koeffizientenvergleich folgert man $A_1 + A_2 = 0$ und $A_1 - A_2 = 1$. Also $A_1 = \frac{1}{2}$ und $A_2 = -\frac{1}{2}$. Die Stammfunktion von f berechnet sich nun wie folgt

$$\int f dx = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|.$$

2) Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x+1)(x+3)}$. Wir machen den Ansatz

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x-2)(x+1)(x+3)} &= \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{x+3}. \\
&= \frac{A_1(x+1)(x+3) + A_2(x-2)(x+3) + A_3(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+1)(x+3)} \\
&= \frac{(A_1 + A_2 + A_3)x^2 + (4A_1 + A_2 - A_3)x_2 + 3A_1 - 6A_2 - 2A_3}{(x-2)(x+1)(x+3)}.
\end{aligned}$$

Aus dem Koeffizientenvergleich ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
A_1 + A_2 + A_3 &= 0 \\
4A_1 + A_2 - A_3 &= 0 \\
3A_1 - 6A_2 - 2A_3 &= 1.
\end{aligned}$$

Die Lösung lautet: $A_1 = \frac{1}{15}, A_2 = -\frac{1}{6}, A_3 = \frac{1}{10}$. Hiermit ergibt sich

$$\int f dx = \frac{1}{15} \ln|x-2| - \frac{1}{6} \ln|x+1| + \frac{1}{10} \ln|x+3|.$$