Übungen Analysis II* - SS 2008

Vorlesender: Prof. Dr. Jochen Brüning
Übungsleiter: Dr. Jörg Wolf
Raum: 1.011

13.Mai.2008

11. Stetigkeit

11.1 Definition Sei $f : X \to f$, wobei $X \subseteq \mathbb{R}$. f heißt *stetig im Punkt* $x \in X$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon, x)$ existiert, so dass

$$|f(x) - f(y)| \le \varepsilon \quad \forall y \in X \quad \text{mit} \quad |x - y| \le \delta.$$

Die Funktion f heißt *gleichmäßig stetig*, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ existiert, so dass

$$|f(x) - f(y)| \le \varepsilon \quad \forall x, y \in X \quad \text{mit} \quad |x - y| \le \delta.$$

11.2 Beispiel Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig auf $[0, 1]$.

Beweis Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Wir setzen $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon^2$. Seien $0 \le x < y \le 1$ mit $y - x \le \delta$. Dann erhalten wir

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = \frac{y - x}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} \le \frac{y - x}{\sqrt{y - x}} = \sqrt{y - x} \le \sqrt{\delta} = \varepsilon.$$

12. Funktionenfolgen

12.1 Definition Sei $X \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktionenfolge $f_n : X \to \mathbb{R}$ *konvergiert punktweise* gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$, falls für jedes $x \in X$:

$$f_n(x) \to f(x) \quad \text{in} \quad \mathbb{R} \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert *gleichmäßig* gegen $f : X \to \mathbb{R}$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon \quad \forall x \in X, \quad \forall n \ge n(\varepsilon).$$

12.2 Beispiel 1) Die Funktionenfolge $f_n(x) := x^n - x^{2n}$ mit $x \in [0, 1]$ konvergiert punktweise gegen $f(x) = 0$ aber nicht gleichmäßig. In der Tat, die Funktion $f_n(x)$ nimmt ihr Maximaum bei $x_n = 2^{-1/n}$ mit $f_n(x_n) = \frac{1}{4}$. Somit (f_n) nicht gleichmäßig konvergent.

12.3 *Sei $f_n : X \to \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge mit $|f_n(x)| \ge \alpha > 0$ für alle $x \in X$, welche gegen $f : X \to \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert. Dann konvergiert die Folge $g_n = \frac{1}{f_n}$ gleichmäßig gegen $g = \frac{1}{f}$.*

Beweis. Aus der Konvergenz $f_n(x) \to f(x)$ und der Voraussetzung ergibt sich $|f(x)| \leq \alpha > 0$ für alle $x \in X$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Nach Voraussetzung existiert $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha\varepsilon \quad \forall x \in X, \quad \forall n \geq n(\varepsilon)$$

Hiermit folgert man

$$\Big|\frac{1}{f_n(x)} - \frac{1}{f(x)}\Big| = \frac{|f_n(x) - f(x)|}{|f(x) f_n(x)|} \leq \frac{|f_n(x) - f(x)|}{\alpha^2} \leq \varepsilon$$

für alle $x \in X$ und $n \geq n(\varepsilon)$.

12.4 Gegeben sei die Funktionfolge $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) := \sqrt{n}(\sqrt{n+x} - \sqrt{n-x}), \quad x \in [-1,1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann konvergiert (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen $f(x) = x$.

Beweis. Elementar berechnet man

$$\begin{aligned} f_n(x) &:= \sqrt{n}(\sqrt{n+x} - \sqrt{n-x}) = \frac{\sqrt{n}2x}{\sqrt{n+x} + \sqrt{n-x}} \\ &= \frac{2x}{\sqrt{1+\frac{x}{n}} + \sqrt{1-\frac{x}{n}}}. \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass

$$\sqrt{1+\frac{x}{n}} + \sqrt{1-\frac{x}{n}} \to 2 \quad \text{gleichmäßig für} \quad n \to \infty.$$

Dies folgt unmittelbar aus der Abschätzung

$$\Big|\sqrt{1+\frac{x}{n}} + \sqrt{1-\frac{x}{n}} - 2\Big| = \Big|\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{x}{n}} + 1} - \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{x}{n}} + 1}\Big| \leq \frac{1}{n}$$

Unter Verwendung von 12.3 sieht man, dass

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}} + \sqrt{1-\frac{x}{n}}} \to \frac{1}{2} \quad \text{gleichmäßig für} \quad n \to \infty.$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung, beachtet man die Beschränktheit des Intervalls $[-1,1]$.

13. Funktionenreihen

13.5 *Seien $f_n, g : X \to \mathbb{R}\,(n \in \mathbb{N})$. Zeigen Sie, die Funktionenreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergiert gleichmäßig gegen f falls*

1) Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergiert gegen $g(x)$ für alle $x \in X$, *2) Es existiert eine konvergente Reihe positiver Zahlen (Majorante)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*, so dass*

$$|f_n(x)| \leq a_n \quad \forall x \in X, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Beweis Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{n=m}^{\infty} a_n \leq \varepsilon$ für alle $m \geq m(\varepsilon)$. Dann haben wir

$$|g(x) - s_{m-1}(x)| = \left| \sum_{n=m}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=m}^{\infty} a_n \leq \varepsilon \quad \forall m \geq m(\varepsilon), \quad \forall x \in X.$$

Somit konvergiert die Reihe gleichmäßig gegen g.

■