Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jochen Brüning
Vorlesung Analysis IIIb, SS 2009

ÜBUNGSBLATT 1

Abgabe am 29.04.2009 vor der Vorlesung (bis 11.10 Uhr)

Aufgabe 1. Sei $R := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |\mathrm{Re}(z)| \leq r, \ |\mathrm{Im}(z)| \leq s\}$ für $r, s > 0$. Berechnen Sie

$$\int_{\partial R} \frac{dz}{z}.$$

Erklären Sie in eigenen Worten, warum das Ergebnis nicht 0 ist, obwohl man stückweise doch scheinbar nur Differenzen von Logarithmen betrachtet.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 2. Sei $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| = 1$. Ist die Funktion

$$u_a : B_1(0) \to \mathbb{R}, \quad z \mapsto \frac{1 - |z|^2}{|z - a|^2},$$

der Realteil einer holomorphen Funktion $f_a = u_a + \mathrm{i}\, v_a$ auf $B_1(0)$? Bestimmen Sie gegebenenfalls v_a. Bestimmen Sie für alle $b \in \mathbb{C}$ mit $|b| = 1$, ob $\lim_{z \to b} u_a(z)$ existiert, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Berechnen Sie:

$$\text{a)} \int_{\partial B_2(0)} \frac{e^z \, dz}{(z+1)(z-3)^2}, \quad \text{b)} \int_{\partial B_2(0)} \frac{\sin\, z}{z + \mathrm{i}} \, dz, \quad \text{c)} \int_{\partial B_1(0)} \frac{dz}{(z-a)^m (z-b)^n},$$

wobei $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| < 1 < |b|$ und $m, n \in \mathbb{N}$.

(2+2+4 Punkte)

Aufgabe 4. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in D$, $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass f nach a holomorph fortsetzbar ist, wenn f' nach a holomorph fortsetzbar ist.

(2 Punkte)

Für weitere Hinweise zur Bearbeitung der Übungsblätter siehe
http://www.math.hu-berlin.de/~geomanal/analysis4.html