Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jochen Brüning
Vorlesung Analysis IIIb, SS 2009

ÜBUNGSBLATT 2

Abgabe am 06.05.2009 vor der Vorlesung (bis 11.10 Uhr)

Aufgabe 1. (*Verschiebung des Entwicklungspunktes*)
Sei G ein Gebiet, $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$, $B := B_r(z_0)$ eine Kreisscheibe mit $\overline{B} \subset G$ und $z_1 \in B_r(z_0)$. Drücken Sie die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von f um z_1 durch die Koeffizienten der Entwicklung um z_0 aus.

(2 Punkte)

Aufgabe 2. Zeigen Sie für $k, n \in \mathbb{N}$ die Identität

$$S(n,k) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^{k} \binom{k+1}{j} (n+1)^{k+1-j} B_j. \qquad (1)$$

(2 Punkte)

Aufgabe 3. Sei G ein Gebiet, $0 \in G$, $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph und $\overline{B_R(0)} \subset G$ für ein $R > 0$. Zeigen Sie, dass für alle $z = re^{i\varphi} \in B$ gilt:

$$f(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \phi) + r^2} f(Re^{i\phi})\, d\phi.$$

Berechnen Sie ausserdem die entsprechenden Formeln für Real- und Imaginärteil $u(r,\varphi)$ bzw. $v(r,\varphi)$ von $f(re^{i\varphi})$.
[Hinweis: Cauchys Integralformel]

(3+1 Punkte)

Aufgabe 4. Zeigen Sie mittels komplexer Integration, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} 2\pi.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 5. Beweisen Sie das Maximumprinzip für beschränkte Gebiete.

(2 Punkte)

Aufgabe 6. Berechnen Sie das Integral $\int_c \frac{1}{1+z^2} dz$ über die positiv orientierten Kreise

- $|z+i|=1$,
- $|z-i|=1$,
- $|z|=2$.

(6 Punkte)

Für weitere Hinweise zur Bearbeitung der Übungsblätter siehe
http://www.math.hu-berlin.de/~geomanal/analysis4.html