

ÜBUNGSBLATT 4

Abgabe am 20.05.2009 vor der Vorlesung (bis 11.10 Uhr)

Aufgabe 1. Beweisen Sie den Satz von Casorati-Weierstrass für ganze Funktionen und $z_0 = \infty$: Es sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ganz und kein Polynom, dann gibt es zu jedem $a \in \mathbb{C}$ eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = a$.

(2 Punkte)

Aufgabe 2. Klassifizieren Sie die isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen, und geben Sie im Falle von Polstellen deren Ordnung an:

$$\begin{aligned} a) z &\mapsto \frac{1 - \cos z}{\sin z}, & b) z &\mapsto \frac{z}{e^z - z + 1}, \\ c) z &\mapsto \frac{z^2 - \pi^2}{\sin^2 z}, & d) z &\mapsto \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z - 2\pi i}. \end{aligned}$$

(je 2 Punkte)

Aufgabe 3. Sei G ein Gebiet, $c \in G$, $f : G \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $p \in \mathbb{C}[z]$ ein nicht konstantes Polynom. Zeigen Sie: c ist genau dann eine isolierte Singularität von f , wenn c eine isolierte Singularität gleichen Typs von $p(f(z))$ ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 4. Benutzen Sie den Satz von Runge, um zu zeigen, dass es eine Folge von Polynomen p_n gibt, mit $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(0) = 1$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}^*$.

[Hinweis: Betrachten Sie eine Folge von Kompakta mit mehreren Zusammenhangskomponenten.]

(5 Punkte)

Aufgabe 5. Beweisen Sie Satz _____ aus der Vorlesung.

(4 Punkte)

Für weitere Hinweise zur Bearbeitung der Übungsblätter siehe
<http://www.math.hu-berlin.de/~geomanal/analysis4.html>