Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jochen Brüning
Vorlesung Analysis IIIb, SS 2009

ÜBUNGSBLATT 5

Abgabe am 27.05.2009 vor der Vorlesung (bis 11.10 Uhr)

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Residuen der folgenden Funktionen an allen isolierten Singularitäten:

$$a)\ z \mapsto \frac{e^z}{(\sin z)^2}, \quad b)\ z \mapsto \cos\left(\frac{z}{1-z}\right), \quad c)\ z \mapsto \sin(1+z^{-1})\cos(1+z^{-2}),$$

(je 1 Punkt)

und

$$d)\ z \mapsto \frac{\cos z \cosh z}{z^3 \sin z \sinh z} \text{ nur an } z_0 = 0. \quad \text{[Hinweis: Polynomdivision.]}$$

(2 Punkte)

Aufgabe 2. Sei $f \in M(\mathbb{C})$ gegeben durch $f(z) := e^{z+z^{-1}}$. Zeigen Sie:

$$\operatorname{Res}\ f\ (0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}.$$

(2 Punkte)

Aufgabe 3. Sei G ein Gebiet, $z_0 \in G$, $f, g : G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $g(z_0) = g'(z_0) = 0$ und $g''(z_0) \neq 0$. Zeigen Sie:

$$\operatorname{Res}\ \frac{f}{g}(z_0) = \frac{6f'(z_0)g''(z_0) - 2f(z_0)g'''(z_0)}{3g''(z_0)^2}.$$

(2 Punkte)

Aufgabe 4. Sei $c : I \to \mathbb{C}$ ein geschlossener C^1-Weg, sodass das Bild im c homöomorph zu $\partial B_1(0)$ ist. Ferner sei das Innere Int c von c *links von* c in dem Sinne, dass für jedes $t \in I$ ein $\epsilon(t) > 0$ existiert mit $\{c(t) + \mathrm{i}\, c'(t)s \ :\ 0 < s < \epsilon(t)\} \subset \operatorname{Int} c$.

Zeigen Sie, dass c einfach geschlossen ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 5. Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

$$a) \quad \int_0^\infty \frac{1}{x^6+1}\,\mathrm{d}\,x, \qquad b) \quad \int_0^\infty e^{zt} t^{-t}\,\mathrm{d}\,t,$$

$$c) \quad \int_0^{2\pi} \frac{1}{3-2\cos\phi+\sin\phi}\,\mathrm{d}\,\phi, \qquad d) \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}\,x.$$

(je 2 Punkte)

Für weitere Hinweise zur Bearbeitung der Übungsblätter siehe
http://www.math.hu-berlin.de/~geomanal/analysis4.html