Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jochen Brüning
Vorlesung Analysis IIIb, SS 2009

ÜBUNGSBLATT 6

Abgabe am 03.06.2009 vor der Vorlesung (bis 11.10 Uhr)

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen der folgenden Funktionen in den jeweils angegebenen Bereichen:

$$\begin{array}{lll} a) & z \mapsto z^5 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{3} & \text{in } B_r(0) \text{ mit } r \in \left\{1; \frac{1}{2}\right\}, \\ b) & z \mapsto z^5 + 3z^4 + 9z + 10 & \text{in } B_2(0), \\ c) & z \mapsto 9z^5 + 5z - 3 & \text{in } \left\{z \in \mathbb{C} \; : \; \frac{1}{2} < |z| < 5\right\}. \end{array}$$

(2+1+1 Punkte)

Aufgabe 2. Es sei $1 < \lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $z \mapsto \lambda - z - e^{-z}$ in $\{z \in \mathbb{C} \; : \; \mathrm{Re}(z) \geq 0\}$ genau eine Nullstelle besitzt, dass diese in $B_1(\lambda)$ liegt und reell ist.

(2 Punkte)

Aufgabe 3. Berechnen Sie das folgende Integral für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $0 < n < m$, indem Sie den Residuensatz für einen geeigneten Weg c anwenden:

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1 + x^m} dx.$$

[Hinweis: Wählen Sie beispielsweise c so, dass c den Rand eines geeigneten Kreissegments der Form $\{z \in B_r(0) \; : \; 0 \leq \arg(z) \leq \alpha\}$ beschreibt.]

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Leiten Sie die folgende Identität her:

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1} \, \mathrm{d}\, x = \pi \ln 2.$$

Wenden Sie dazu den Residuensatz für einen geeigneten Weg auf die Funktion $z \mapsto \frac{\ln(z+i)}{z^2+1}$ an.

(4 Punkte)

Aufgabe 5. Leiten Sie die folgenden Identitäten her, indem Sie den Residuensatz anwenden:

$$
\begin{aligned}
&a) \quad \int_0^{2\pi} \frac{1}{(5-3\sin\phi)^2}\,\mathrm{d}\,\phi = \frac{5\pi}{32},\\
&b) \quad \int_0^{\infty} \frac{(\ln x)^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi^3}{8} \text{ und } \int_0^{\infty} \frac{(\ln x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}\,x = 0.
\end{aligned}
$$

(2+4 Punkte)

Aufgabe 6. Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}, \text{ für } 0 < p < 1.$$

[Hinweis: Wählen Sie dazu einen geeigneten geschlitzten Kreisring beziehungsweise dessen Randkurve.]

(2 Punkte)

Für weitere Hinweise zur Bearbeitung der Übungsblätter siehe
http://www.math.hu-berlin.de/~geomanal/analysis4.html