Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jochen Brüning
Vorlesung Analysis IIIb, SS 2009

ÜBUNGSBLATT 8

Abgabe am 17.06.2009 vor der Vorlesung (bis 11.10 Uhr)

Aufgabe 1. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $A : U \to \mathbb{R}^n$ ein C^∞-Vektorfeld. Zeigen Sie, dass dann zu jedem $x_0 \in U$ ein offenes Intervall $I_{x_0} \ni 0$ und genau eine Lösung c_{x_0} auf I_{x_0} des Anfangswertproblems existiert, und dass ferner $c_{x_0} \in C^\infty(I, U)$ gilt.

(3 Punkte)

Aufgabe 2. Sei $U \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $x_0 \in U$, $A_1, A_2 \in C(U, \mathbb{R})$ mit $A_1 < A_2$ und seien $c_1, c_2 : I_{x_0} \to U$ Lösungen der Anfangswertprobleme $\frac{d}{dt} c_{x_0}(t) = A_i(c_{x_0}(t))$, $c_{x_0}(0) = x_0$ (für $i = 1; 2$).
Zeigen Sie, dass für alle $t \in I_{x_0}$ gilt:

$$c_1(t) \leq c_2(t), \text{ falls } t \geq 0, \text{ und } c_1(t) \geq c_2(t), \text{ falls } t \leq 0.$$

(3 Punkte)

Aufgabe 3. Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass alle Vektorfelder auf M vollständig sind.

(3 Punkte)

Aufgabe 4. Bestimmen Sie für die im Folgenden gegebenen Vektorfelder X die maximalen Integralkurven (inklusive des maximalen Intervalls), und geben Sie die Menge D_t, die Abbildung ϕ_t und ihr Bild $Im(\phi_t)$ an:

a) $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$,

b) $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$,

c) $X : (-1, 1) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$.

(2+2+3 Punkte)

Für weitere Hinweise zur Bearbeitung der Übungsblätter siehe
http://www.math.hu-berlin.de/~geomanal/analysis4.html