Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jochen Brüning
Vorlesung Analysis IIIb, SS 2009

ÜBUNGSBLATT 10

Abgabe am 01.07.2009 vor der Vorlesung (bis 11.10 Uhr)

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Wronski-Determinante entweder nirgends oder überall verschwindet.

(2 Punkte)

Aufgabe 2. Es seien I ein offenes Intervall, $a_0, a_1 \in C(I, \mathbb{R})$, und $x : I \to \mathbb{R}$ eine nicht überall verschwindende Lösung der DGL

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = 0. \tag{1}$$

Zeigen Sie:

a) x besitzt keine doppelten Nullstellen, und die Menge der Nullstellen von x besitzt keine Häufungspunkte in I.

b) Die Lösungen der DGL (1) bilden einen zweidimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

c) Wenn $\{f_1, f_2\}$ eine Basis des Lösungsraums der DGL (1) ist, dann liegt zwischen je zwei Nullstellen von f_1 eine Nullstelle von f_2.

[Hinweis: Benutzen Sie die Wronski-Determinante.]

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass jedes $X \in C^1_C(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ vollständig ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Bestimmen Sie zu den folgenden DGLn zweiter Ordnung jeweils die Lösungen der homogenen Gleichung, eine Lösung der inhomogenen Gleichung sowie die Lösung zu den Anfangswerten $x(0) = 0 = x'(0)$:

a) $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 2,$

b) $x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) = 4te^t - \sin\, t.$

(3+3 Punkte)

Aufgabe 5. Berechnen Sie eine spezielle Lösung der Gleichung

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x(t) + e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(4 Punkte)

Für weitere Hinweise zur Bearbeitung der Übungsblätter siehe
http://www.math.hu-berlin.de/~geomanal/analysis4.html