

ÜBUNGSBLATT 11

Abgabe am 08.07.2009 vor der Vorlesung (bis 11.10 Uhr)

Aufgabe 1. Es sei $J \in L(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$ gegeben durch

$$J := \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie e^J .

(3 Punkte)

Aufgabe 2. Es seien $A \in L(\mathbb{C}^m)$ halbeinfach und $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A . Berechnen Sie die Eigenwerte von e^A .

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Zeigen Sie: Für $A \in L(\mathbb{K}^m)$ mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ gilt

$$\det e^A = e^{\operatorname{tr}(A)}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Gleichungen, indem Sie Eigenwerte zur Bestimmung eines komplexen Fundamentalsystems nutzen und daraus ein reelles Fundamentalsystem herleiten.

$$\begin{aligned} a) \quad x'(t) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} x(t) + e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ t \end{pmatrix} \\ b) \quad x'(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x(t) \end{aligned}$$

(3+3 Punkte)

Aufgabe 5. Berechnen Sie die allgemeine Lösung von

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(t).$$

Bestimmen Sie das Verhalten der Lösungen für $t \rightarrow \pm\infty$.

(3 Punkte)

Für weitere Hinweise zur Bearbeitung der Übungsblätter siehe
<http://www.math.hu-berlin.de/~geomanal/analysis4.html>