Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik
Dr. Bernhard Gerlach

SS2013

Zuverlässigkeitstheore

Serie 9

Aufgabe 1.
Für eine nichtnegative Zufallsgröße X sei eine Ausfallrate $r(x) = 2\lambda^2 x, \qquad x \geqslant 0$, für ein $\lambda > 0$ gegeben.
Bestimmen Sie:

(a) die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ und die Verteilungsdichte $f_X(x)$

(c) für $\lambda = 2$ die Wahrscheinlichkeit $P(X \in (0.5, 2.5])$

(d) die bedingte Zuverlässigkeit

$$\overline{F}_X(x/t) = \frac{\overline{F}_X(x+t)}{\overline{F}_X(t)}$$

für

$$\lambda = 2 \;\text{ und }\; \begin{array}{ll} x = 0,5, & t_1 = 0.25 \\ x = 0.5 & t_2 = 0.75 \end{array}.$$

Aufgabe 2.
Für eine nichtnegative Zufallsgröße X mit der Dichte $f(x)$ und der Verteilungsfunktion $F(x)$ möge der Erwartungswert $\mu = EX < \infty$ existieren.
Beweisen Sie unter dieser Voraussetzung die Gültigkeit von

$$\mu = \int_0^\infty \overline{F}(x)dx.$$

Aufgabe 3.
Die Zufallsgröße X habe eine Dichte f_X und eine streng monoton wachsende (stetige) Verteilungsfunktion F_X. Bestimmen Sie für die Zufallsgröße $Y = F_X(X)$ die Dichte f_Y und Verteilungsfunktion F_Y .

Aufgabe 4.
Die Zufallsgröße U besitze eine Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, 1]$. Weiterhin sei F eine streng monoton wachsende Verteilungsfunktion mit der zugehörigen Dichte f. Bestimmen Sie für die Zufallsgröße $Y = F^{-1}(U)$ die Dichte f_Y und die Verteilungsfunktion F_Y .

Aufgabe 5.
Beweisen Sie für die Gammafunktion $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1} exp(-x)dx$ die Identität $\Gamma(n) = (n-1)!$ für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 6.
Beweisen Sie unter Nutzung der Eigenschaften der Dichte der Standardnormalverteilung für die Gammafunktion $\Gamma(x)$ die Gültigkeit von $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$