HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
BEREICH STOCHASTIK
PROF. IMKELLER

Blatt 1
SoSe 01

Übungen zur Stochastik II

Aufgabe 1. Konstruieren Sie eine Folge $(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Wahrscheinlichkeitsräumen (mit jeweils der gleichen Grundmenge Ω), so daß gilt:

i) $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \ldots$ und $\mathbb{P}_{n+1}|_{\mathcal{F}_n} = \mathbb{P}_n$ für $n \in \mathbb{N}$.

ii) Es existiert kein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $\mathcal{F} := \sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n\right)$, so daß $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}|_{\mathcal{F}_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(Hinweis: Versuchen Sie es mit $\Omega =]0,1]$, endlichen σ-Algebren $\mathcal{F}_n$ und Maßen $\mathbb{P}_n$, die nur die Werte 0 und 1 annehmen.) (4)

Aufgabe 2. Sei $(X_i, \mathcal{F}_i)_{i\in I}$ eine Familie meßbarer Räume, $X = \times_{i\in I} X_I$ und $\mathcal{F}$ die Produkt-σ-Algebra auf X (also die gröbste σ-Algebra auf X, so daß für jedes $i \in I$ die Abbildung $X \to X_i,\ (x_i)_{i\in I} \mapsto x_i$ meßbar ist). Zeigen Sie:
Zu jedem $A \in \mathcal{F}$ existiert eine höchstens abzählbare Teilmenge $I_A \subset I$, so daß für alle $x = (x_i)_{i\in I},\ y = (y_i)_{i\in I} \in X$ gilt:

$$x_i = y_i \text{ für alle } i \in I_A \implies (x \in A \iff y \in A). \qquad (4)$$

Aufgabe 3. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Präzisieren und beweisen Sie:
Durch

$$d(A,B) := \mu(A\Delta B) \quad (A, B \in \mathcal{F})$$

wird $(\mathcal{F}, d)$ zu einem vollständigen metrischem Raum, falls man Mengen identifiziert, die sich nur um eine Menge vom Maß 0 unterscheiden.
(Dabei bezeichne $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ die symmetrische Differenz der Mengen A, B.)
(4)

Aufgabe 4. Zeigen Sie: Es existiert eine Menge $A \in \mathcal{B}([0,1])$, so daß für jedes Intervall $I \subset [0,1]$ mit echt positiver Länge gilt:

$$\lambda(I \cap A) > 0 \text{ und } \lambda(I \setminus A) > 0 \quad (\lambda = \text{ Lebesguemaß}).$$

(Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis von Aufg. 3 sowie den Satz von Baire: Ist (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge offener dichter Teilmengen von X, so ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ nichtleer.) (4)

Literaturempfehlung zum Auffrischen der Maßtheorie:
J. Bellach, P. Franken, W. Warmuth, E. Warmuth: Maß, Integral und bedingter Erwartungswert, Akademie-Verlag Berlin 1978 (in der Bibliothek vorhanden)

Abgabe: Mittwoch, 2.5.01 vor der Übung