HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
BEREICH STOCHASTIK
PROF. IMKELLER

Blatt 10
SoSe 01

Übungen zur Stochastik II

Doppelaufgabe 37/38. Sei S eine endliche Menge. Für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße μ, ν auf S sei der Variationsabstand $\|\mu - \nu\|$ definiert durch

$$\|\mu - \nu\| \; = \; \sup\{\int_S f d\mu - \int_S f d\nu \; : \; f : S \to [-1,1]\}.$$

Der Kontraktionskoeffizient $c(P)$ einer Übergangsmatrix P auf S sei definiert durch

$$c(P) \; = \; \frac{1}{2} \max\{\|P(x,\cdot) - P(y,\cdot)\| \; : \; x,y \in S\}.$$

Seien μ, ν Wahrscheinlichkeitsmaße und P eine Übergangsmatrix auf S. Zeigen Sie:

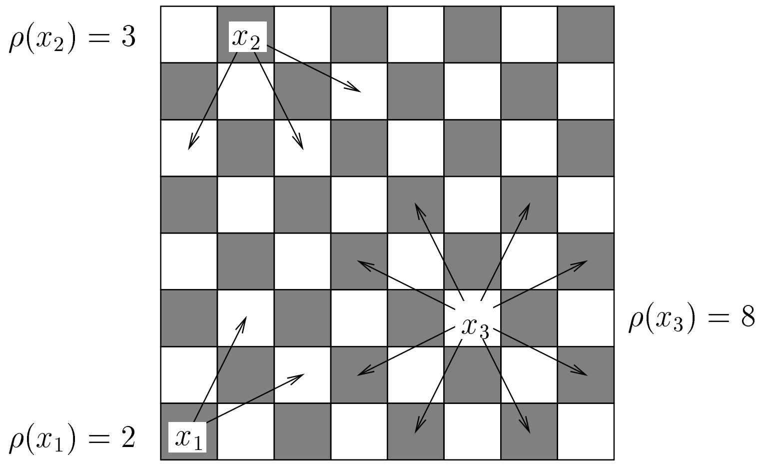
i) $\|\mu P - \nu P\| \; \leq \; c(P)\|\mu - \nu\|$

ii) $\|\mu - \nu\| \; = \; 2 \sum_{x \in S} \Big(\mu(x) - \nu(x)\Big)^+ \; = \; 2 \left(1 - \sum_{x \in S} \mu(x) \wedge \nu(x)\right)$

iii) $c(P) \; \leq \; 1 - |S| \min_{x,y \in S} P(x,y)$.

iv) Ist P eine primitiv, so besitzt P genau eine invariante Verteilung. (Eine Übergangsmatrix P auf S heißt *primitiv*, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $P^n(x,y) > 0$ für alle $x, y \in S$.) (8)

Aufgabe 39. Sei S die Menge der Felder auf dem Schachbrett. Für $x \in S$ sei $\rho(x)$ die Anzahl aller legalen Züge eines Springers, der sich auf dem Feld x befindet (vgl. Skizze).



Die Übergangsmatrix P auf S sei definiert durch

$$P(x,y) \; = \; \begin{cases} \frac{1}{\rho(x)} & \text{falls } x \to y \text{ ein legaler Zug des Springers ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die zugehörige Markovkette beschreibt also eine Irrfahrt des Springers auf dem Schachbrett, wobei bei jedem Schritt der nächste Zug gleichverteilt aus der Menge der möglichen Züge ausgewürfelt wird.
Wieviele Züge sind Mittel nötig, bis ein Springer, der in einem Eckfeld startet, zu seinem Ausgangsfeld zuückkehrt?
(Hinweis: Als Schachspieler weiß man, daß zwei beliebige Felder durch eine Springerwanderung verbunden werden können, d.h. die betrachtete Markovkette ist irreduzibel.) (4)

Aufgabe 40. Sei P die Übergangsmatrix einer irreduziblen Markovkette mit endlichem Zustandsraum. Sei s ein (möglicherweise komplexer) Eigenwert von P mit $|s| = 1$ und d die Periode der Markovkette. Zeigen Sie, daß $s^d = 1$. (4)

Abgabe: Mittwoch, 04.07.01 vor der Übung