HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
BEREICH STOCHASTIK
PROF. IMKELLER

**Blatt 11**
**SoSe 01**

**Übungen zur Stochastik II**

**Aufgabe 41.** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ und $M_n = \max(S_0, \ldots, S_n)$. Zeigen Sie, daß für alle $r, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathbb{P}(M_n \geq r) \;=\; 2\mathbb{P}(S_n \geq r+1) + \mathbb{P}(S_n = r).$$

(Hinweis: Eine Skizze ist hier sehr nützlich.) (4)

**Aufgabe 42.** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozeß mit Werten in der abzählbaren Menge $S$ und $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$, $n \geq 0$, sowie $P$ eine Übergangsmatrix auf $S$. Zeigen Sie die Äquivalenz der Aussagen

(i) $(X_n)_{n\geq 0}$ ist eine Markovkette mit Übergangsmatrix $P$.

(ii) Für jede beshränkte Funktion $f$ auf $S$ ist der Prozeß

$$M_n^f \;=\; f(X_n) - \sum_{i=0}^{n-1} (P-I)f(X_i), \quad n \geq 0,$$

ein Martingal. ($Pf(x) := \sum_{y\in S} P(x,y)f(y)$, $I$ bezeichnet die Einheitsmatrix.) (4)

**Doppelaufgabe 43/44.** Sei $(\xi_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{Z}^d$ und $X_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Sei ferner $\mu = \mathbb{P}_{\xi_1}$ und

$$\hat{\mu}(\theta) \;=\; \mathbb{E}\left(e^{i\langle \xi_1, \theta\rangle}\right) \qquad \text{für } \theta \in \mathbb{R}^d.$$

a) Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{Z}^d$ gilt:

$$\mathbb{P}(X_n = x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} e^{-i\langle\theta, x\rangle}\, \hat{\mu}(\theta)^n \, d\theta.$$

b) Sei $N = \#\{n \in \mathbb{N}_0 \;:\; X_n = 0\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ die Anzahl der Besuche bei 0. Zeigen Sie: Falls $\mu$ symmetrisch ist (d.h. $\mu(B) = \mu(-B)$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, so ist

$$\mathbb{E}(N) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{d\theta}{1-\hat{\mu}(\theta)},$$

wobei $\frac{1}{0} := +\infty$. (Beachten Sie, daß beide Seiten unendlich sein können!)

c) Sei nun $(X_n)_{n\geq 0}$ eine symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$ (d.h. $\mathbb{P}(\xi_1 = e_i) = \mathbb{P}(\xi_1 = -e_i) = \frac{1}{2d}$, $i = 1, \ldots, d$, wobei $e_1, \ldots, e_d$ die Einheitsvektoren in $\mathbb{R}^d$ sind). Für welche Dimensionen $d$ ist $\mathbb{E}(N) < \infty$?
(Hinweis: Polarkoordinaten!) (8)

**Abgabe:** Mittwoch, 11.07.01 vor der Übung