

Übungen zur Stochastik II

Die Bearbeitung dieses Übungsblattes ist freiwillig (8 Sonderpunkte pro Aufgabe)

**Aufgabe 45.** Sei  $X$  eine endliche Menge und  $H : X \rightarrow \mathbb{R}$  nicht konstant. Sei ferner  $G$  eine symmetrische stochastische Matrix auf  $X$ . Für  $\beta > 0$  sei

$$\mu_\beta(x) = \frac{1}{Z_\beta} e^{-\beta H(x)} \quad \text{mit } Z_\beta = \sum_{x \in X} e^{-\beta H(x)}$$

und

$$P_\beta(x, y) = \begin{cases} G(x, y) e^{-\beta(H(y)-H(x))^+} & \text{für } x \neq y, \\ 1 - \sum_{z \in X \setminus \{y\}} \pi(x, z) & \text{für } x = y. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

- $\mu_\beta$  ist eine invariante Verteilung für  $P_\beta$ .
- Für  $\beta \rightarrow \infty$  konvergiert  $\mu_\beta$  gegen die Gleichverteilung  $\mu_\infty$  auf den Minima von  $H$ .
- Sei nun  $G$  strikt positiv. Finden Sie eine Folge  $(\beta_n)$  mit folgender Eigenschaft: Für jede Startverteilung  $\nu$  auf  $X$  gilt:

$$\nu P_{\beta_1} \dots P_{\beta_n} \rightarrow \mu_\infty.$$

(Hinweis: Benutzen Sie Aufg. 37./38.)

**Aufgabe 46.** Schreiben Sie ein Programm (möglichst nicht in Basic), das mithilfe von Aufg. 45 approximativ das "Problem des Handlungsreisenden" löst:

Es soll die Koordinaten von  $n$  Punkten  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^2$  einlesen und eine Permutation  $(y_1, \dots, y_n)$  von  $(x_1, \dots, x_n)$  ausgeben, so daß die Weglänge  $\sum_{i=1}^n |y_{i+1} - y_i|$  ( $y_{n+1} := y_1$ ) möglichst klein wird.

Hinweis: Der Zustandsraum  $X$  ist natürlich die Menge aller Permutationen von  $\{1, \dots, n\}$  und  $H$  ist durch die Weglänge gegeben. Der Punkt c) aus Aufg. 45 ist hier nicht wörtlich zu nehmen: Die Folge  $(\beta_n)$  muß man durch eine schneller wachsende Folge ersetzen, wenn man sterblich ist. Auch die Matrix  $G$  wird man nicht strikt positiv wählen; stattdessen könnte z.B.  $G$  zwei zufällig ausgewählte Punkte permutieren (so daß die Berechnung der Wegdifferenz  $H(y) - H(x)$  nur wenige Koordinaten benötigt, wenn  $G(x, y) > 0$ ).

Lösungen dieser Aufgabe sollten vorzugsweise per Email geschickt werden (lederer@mathematik.hu-berlin.de).

**Abgabe:** Mittwoch, 18.07.01 vor der Übung