HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
BEREICH STOCHASTIK
PROF. IMKELLER

Blatt 2
SoSe 01

Übungen zur Stochastik II

Aufgabe 5. Zeigen Sie: Die Menge $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ ist nicht meßbar in $[0,1]^{\mathbb{R}}$ (versehen mit der von $\mathcal{B}([0,1])$ erzeugten Produkt-σ-Algebra.) (4)

Aufgabe 6. Sei E ein polnischer Raum.

(i) Sei $\mu|_{\mathcal{B}(E)}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß das nur die Werte 0 und 1 annimmt.
Zeigen Sie: Es existiert $x \in E$ mit $\mu(\{x\}) = 1$.

(ii) Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in E und $f : E \to E$ meßbar. Zeigen Sie: Falls die Zufallsvariablen X und $f \circ X$ unabhängig sind, so ist die Zufallsvariable $f \circ X$ $\mathbb{P}$-fast sicher konstant. (4)

Aufgabe 7. Sei $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit $\lambda(A) > 0$ (λ = Lebesguemaß). Zeigen Sie, daß 0 ein innerer Punkt der Menge $A - A := \{x - y \ : \ x, y \in A\}$ ist.
(Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Ulam, um zunächst A von innen durch eine kompakte Menge und diese von außen durch eine geeignete offene Menge zu approximieren.) (4)

Aufgabe 8. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und

$$\mathcal{M} \ : \ \{f : \Omega \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ meßbar}\}.$$

Für $f, g \in \mathcal{M}$ sei

$$d(f,g) \ := \ \int 1 \wedge |f - g| \, d\mu.$$

Zeigen Sie, daß der Raum $(\mathcal{M}, d)$ ein vollständiger metrischer Raum ist, wenn man μ-fast sicher gleiche Funktionen identifiziert. (4)
Zusatzfrage: Besteht ein Zusammenhang zwischen der Konvergenz bezüglich der Metrik d und einer der bekannten Konvergenzarten für Zufallsvariable (fast sichere Konvergenz, Konvergenz in Wahrscheinlichkeit, Konvergenz in Verteilung)? (4 Sonderpunkte)

Abgabe: Mittwoch, 9.5.01 vor der Übung