HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
BEREICH STOCHASTIK
PROF. IMKELLER

Blatt 3
SoSe 01

Übungen zur Stochastik II

Aufgabe 9. Sei $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Sei $(\Omega', \mathcal{A}')$ ein meßbarer Raum und $Y : \Omega \to \Omega'$ meßbar. Zeigen Sie: Es existiert eine meßbare Funktion $g : \Omega' \to \mathbb{R}$, so daß

$$\mathbb{E}(X \mid Y) \;=\; g(Y).$$

(Hinweis: Zeigen Sie allgemein, daß sich jede $\sigma(Y)$-meßbare reellwertige Zufallsvariable Z als Funktion von Y darstellen läßt. Betrachten Sie zunächst den Fall, daß Z eine Indikatorfunktion ist.) (4)

Aufgabe 10. Seien X, Z unabhängigige zum Parammeter 1 poissonverteilte Zufallsvariable und $Y = X + Z$. Nach Aufg. 9 existiert eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\mathbb{E}(X \mid Y) = g(Y)$. Bestimmen Sie g. (4)

Aufgabe 11/12. Seien μ, ν Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

(i) Zeigen Sie: Es existiert eine meßbare Funktion $g : \Omega \to [0,1]$, so daß für jedes $f \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \cap \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ gilt:

$$\int f \; d\nu \;=\; \int fg \; d\mu + \int fg \; d\nu.$$

(Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, daß durch $\phi(f) := \int f \; d\nu$ ein stetiges lineares Funktional ϕ auf $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu + \nu)$ definiert wird.)

(ii) Zeigen Sie mithilfe von (i): Falls $\nu \ll \mu$ (d.h. falls $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$ für $A \in \mathcal{A}$), so existiert eine meßbare Funktion $h : \Omega \to \mathbb{R}^+$ mit

$$\nu(A) \;=\; \int_A h \; d\mu$$

für alle $A \in \mathcal{A}$. (8)

Abgabe: Mittwoch, 16.5.01 vor der Übung