HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
BEREICH STOCHASTIK
PROF. IMKELLER

Blatt 4
SoSe 01

Übungen zur Stochastik II

Aufgabe 13. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für eine meßbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ sei

$$\|f\|_\infty \;=\; \inf\{c > 0 \;:\; |f| \leq c \;\mu\text{-fast sicher}\}$$

(wobei $\inf \emptyset := 0$). Ferner sei

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \;=\; \{f : X \to \mathbb{R} \;:\; f \text{ meßbar und } \|f\|_\infty < \infty\};$$

$L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ sei die Menge der Äquivalenzklassen in $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ bezüglich fast sicherer Gleichheit. Zeigen Sie:

a) $(L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu), \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum.

b) Für alle $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ist $\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p$. (4)

Aufgabe 14. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ferner sei $\mathcal{T}$ eine endliche Gruppe von meßbaren bijektiven Abbildungen von Ω nach Ω und $\mathcal{I} = \{A \in \mathcal{F} \;:\; T^{-1}(A) = A \text{ für alle } T \in \mathcal{T}\}$. Zeigen Sie, daß

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{I}) \;=\; \frac{1}{|\mathcal{T}|} \sum_{T \in \mathcal{T}} X \circ T.$$

(4)

Aufgabe 15. Sei X eine reellwertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, so daß $X, f(X) \in \mathcal{L}^1$. Zeigen Sie:

a) f läst sich als Supremum von abzählbar vielen affinen Funktionen darstellen.

b) Für jede σ-Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ ist

$$f(\mathbb{E}(X \mid A)) \;\leq\; \mathbb{E}(f(X) \mid \mathcal{A}).$$

(4)

Aufgabe 16. Ein Fahrgast betritt den Bahnsteig der U9 am Bahnhof Zoo. Sei τ_1 die Wartezeit auf den Zug Richtung Rathaus Steglitz und τ_2 die Wartezeit auf den Zug Richtung Vinetastraße. Da der Fahrgast die genauen Abfahrtszeiten nicht kennt, sondern nur weiß, daß die Züge im Zehnminutentakt fahren, sind τ_1 und τ_2 unabhängige im Intervall $[0, T]$ gleichverteilte Zufallsvariable ($T = 10$ min). Sei $T_1 = \min(\tau_1, \tau_2)$ die Wartezeit auf den ersten eintreffenden Zug und $T_2 = \max(\tau_1, \tau_2)$ die Wartezeit auf den zweiten Zug.
Berechnen Sie die bedingte Erwartung $\mathbb{E}(T_2 \mid T_1)$. (4)

Abgabe: Mittwoch, 23.05.01 vor der Übung