Übungen zur Stochastik II

Aufgabe 17. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit $X_1 \in \mathcal{L}^1$ und $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ für $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie

$$\mathbb{E}(X_1 \mid \sigma(S_k \ : \ k \geq n)).$$

(Hinweis: Nutzen Sie Symmetrieeigenschaften des Problems aus.) (4)

Aufgabe 18. Seien X, Y reellwertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ meßbar und beschränkt. Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$g(y) \ = \ \mathbb{E}(f(X, y)).$$

Gilt dann stets

$$\mathbb{E}(f(X,Y) \mid Y) \ = \ g(Y) \ ?$$

(Beweis oder Gegenbeispiel!) (4)

Aufgabe 19. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen identisch verteilten reellwertigen Zufallsvariablen mit strikt positiver Dichte f (bezüglich des Lebesguemaßes). Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ eine weitere Dichtefunktion und

$$Z_0 \ = \ 1, \qquad Z_n \ = \ \frac{\prod_{i=1}^n g(X_i)}{\prod_{i=1}^n f(X_i)} \text{ für } n \geq 1.$$

Zeigen Sie, daß $\mathbb{E}(Z_{n+1} \mid \sigma(Z_1, \ldots, Z_n)) = Z_n$ für $n \geq 0$. (4)

Aufgabe 20. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen standardnormalverteilten Zufallsvariablen sowie $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ und $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

a) Finden Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ so daß die Folge $S_n^2 - a_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ ist.

b) Finden Sie eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ so daß die Folge $e^{S_n - b_n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ ist. (4)

Abgabe: Mittwoch, 30.05.01 vor der Übung