HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
BEREICH STOCHASTIK
PROF. IMKELLER

Blatt 6
SoSe 01

Übungen zur Stochastik II

Aufgabe 21. Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von reellwertigen Zufallsvariablen und τ eine Stopzeit bezüglich der Filtration $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, \ldots, X_n)$, $n \geq 0$. Zeigen Sie, daß für alle $\omega, \omega' \in \Omega$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$X_k(\omega) = X_k(\omega') \text{ für } k = 0, \ldots, n \quad \Longrightarrow \quad \tau(\omega) \wedge n = \tau(\omega') \wedge n.$$

(4)

Aufgabe 22. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Filtration von $\mathcal{F}$ und $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$-adaptierter reellwertiger Prozeß mit $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$ für $n \in \mathbb{N}$. Für jede beschränkte Stopzeit T sei $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$.
Zeigen Sie, daß X ein Martingal ist. (4)

Aufgabe 23. Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ ein Martingal auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Sei $\mathbf{Q}$ ein weiteres Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$, so daß $\mathbb{P}$ eine Dichte Z bezüglich $\mathbf{Q}$ besitzt. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $Z_n = \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}(Z \mid \mathcal{F}_n)$. (Der Index "$\mathbf{Q}$" bei $\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}$ soll andeuten, daß die bedingte Erwartung bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbf{Q}$ gebildet wird.)
Zeigen Sie: Der Prozeß $(X_n Z_n)_{n\geq 0}$ ist eine Martingal bezüglich $\mathbf{Q}$. (4)

Aufgabe 24. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}^-}$ eine *Rückwärtsmartingal* bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}^-}$, d.h. es ist $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}^-}$ eine Familie von Unter-σ-Algebren von $\mathcal{F}$ mit $\mathcal{F} \supset \mathcal{F}_0 \supset \mathcal{F}_{1-} \ldots$, und jedes X_n ist integrierbar und $\mathcal{F}_n$-meßbar mit $X_{n-1} = \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1})$. Zeigen Sie:
$X_{-\infty} := \lim_{n\to-\infty} X_n$ existiert $\mathbb{P}$-fast sicher (ohne Zusatzvoraussetzungen!). (4)

Abgabe: Mittwoch, 06.0601 vor der Übung