HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
BEREICH STOCHASTIK
PROF. IMKELLER

Blatt 7
SoSe 01

Übungen zur Stochastik II

Aufgabe 25. Sei $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(\xi_n = 1) = \mathbb{P}(\xi_n = -1) = \frac{1}{2}$. Ferner sei $X_n = \prod_{i=0}^n \xi_i$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_0, \dots, \xi_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$.
Zeigen Sie: Es gibt keine Zufallsvariable X mit $X_n = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, obwohl die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ natürlich ein Martingal ist. (4)

Aufgabe 26. Sei $(\xi_i^n)_{i\in\mathbb{N},n\in\mathbb{N}_0}$ eine unabhängige Familie von identisch verteilten Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{N}_0$ und $0 < \mu = \mathbb{E}(\xi_i^n) < \infty$. Der Prozeß $(Z_n)_{n\geq 0}$ sei rekursiv definiert durch

$$Z_0 := 1, \quad Z_{n+1} := \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_i^n.$$

Zeigen Sie: Der Prozeß

$$\left(\frac{Z_n}{\mu^n}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

ist ein Martingal bezüglich der Filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_i^m : i \in \mathbb{N}, 1 \leq m < n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. (5)

Aufgabe 27. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ (λ=Lebesguemaß).
Zeigen Sie: Es existiert keine Metrik d auf der Menge aller reellwertigen Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (bei Identifikation von $\mathbb{P}$-fast sicher gleichen Zufallsvariablen) so daß gilt:

$$f_n \to f \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher} \qquad \Longleftrightarrow \qquad d(f_n, f) \to 0.$$

(Hinweis: Benutzen Sie die Zusammenhänge zwischen fast sicherer Konvergenz und Konvergenz nach Wahrscheinlichkeit.) (4)

Aufgabe 28. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Submartingal. Ist dann die Folge $(X_n - \mathbb{E}(X_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ stets ein Martingal? (Beweis oder Gegenbeispiel!) (4)

Abgabe: Mittwoch, 13.06.01 vor der Übung