HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
BEREICH STOCHASTIK
PROF. IMKELLER

Blatt 8
SoSe 01

Übungen zur Stochastik II

Aufgabe 29. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$ und T eine Stopzeit bezüglich der Filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, $n \geq 0$. Zeigen Sie, daß

$$\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{T} X_i) \;=\; \mathbb{E}(T)\mathbb{E}(X_1).$$

(4)

Aufgabe 30. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Submartingal und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex mit $\mathbb{E}(|f(X_n)|) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Ist dann die Folge $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ stets ein Submartingal? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

Aufgabe 31. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $\mathcal{M}$ ist gleichgradig integrierbar.

(ii) Es gilt:

a) $\sup\limits_{f\in\mathcal{M}} \int |f| \, d\mu < \infty$.

b) Zu $\epsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so daß für alle $A \in \mathcal{F}$ gilt:

$$\mu(A) \;\leq\; \delta \quad\Longrightarrow\quad \sup_{f\in\mathcal{M}} \int_A |f| \, d\mu \;\leq\; \epsilon.$$

(4)

Aufgabe 32. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (]0,1], \mathcal{B}(]0,1]), \lambda)$. Sei μ ein weiteres Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^+$ definiert durch $f_n(x) = 2^n \mu(](i-1)/2^n, i/2^n])$ für $x \in](i-1)/2^n, i/2^n])$, $1 \leq i \leq 2^n$. Es ist dann wohlbekannt, daß die Folge (f_n) ein Martingal bildet (bezüglich der Filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(\{](i-1)/2^n, i/2^n] \mid n \in \mathbb{N}_0, 1 \leq i \leq 2^n\})$.
Ist dieses Martingal stets gleichgradig integrierbar? (Beweis oder Gegenbeispiel!) (4)

Abgabe: Mittwoch, 20.06.01 vor der Übung