HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
BEREICH STOCHASTIK
PROF. IMKELLER

Blatt 9
SoSe 01

Übungen zur Stochastik II

Aufgabe 33. Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ ein Martingal und T eine Stopzeit mit $\mathbb{E}(T) < \infty$. Gilt dann stets $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$ (vgl. Aufg. 29)? (4)

Aufgabe 34. Ein Spieler wendet bei einem fairen Glücksspiel (z.B. Münzwurf) die Verdoppelungsstrategie an, d.h. er verdoppelt seinen Einsatz bei Verlust und bricht das Spiel ab, sobald er das erste Mal gewonnen hat. (Wir nehmen an, daß er über unbegrenzten Kredit verfügt). Sei T die Wartezeit auf seinen Gewinn.
Zeigen Sie, daß $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ und $\mathbb{E}(T) = \infty$. (4)

Aufgabe 35. Sei $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ integrierbar (bezüglich des Lebesguemaßes). Wir setzen f periodisch fort auf das Intervall $[0,2[$ und setzen

$$f_n(x) \; = \; 2^{-n}\sum_{i=1}^{2^n} f(x+i2^{-n}), \qquad n\in\mathbb{N}, x\in[0,1[.$$

Zeigen Sie, daß $f_n \to f$ λ-fast sicher auf $[0,1[$. (4)

Aufgabe 36. Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ ein Martingal, so daß $|X_{n+1}-X_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und eine gewisse Konstante $C > 0$.
Zeigen Sie: Es existiert eine Menge $\tilde{\Omega} \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(\tilde{\Omega}) = 1$, so daß für alle $\omega \in \tilde{\Omega}$ gilt: Entweder $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$ existiert in $\mathbb{R}$ oder es ist $\limsup_{n\to\infty} X_n(\omega) = +\infty$ und $\liminf_{n\to\infty} X_n(\omega) = -\infty$.
(Hinweis: Betrachten Sie für $a \geq 0$ das gestopte Martingal $(X_{n\wedge\tau_a})_{n\geq 0}$, wobei $\tau_a = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 \; : \; X_n \geq a\}$.) (4)

Abgabe: Mittwoch, 27.06.01 vor der Übung