Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik
Prof. Dr. Peter Imkeller

Blatt 1
SS 2002

Übungen zur stochastischen Analysis

Aufgabe 1. Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein beliebiger $\mathbb{R}^d$-wertiger stochastischer Prozeß und τ eine Stopzeit bezüglich der Filtration $\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t)$, $t \geq 0$.
Seien $\omega, \omega' \in \Omega$ mit

$$X_t(\omega) \;=\; X_t(\omega') \quad \text{für alle } t \in [0, \tau(\omega)] \cap \mathbb{R}^+.$$

Zeige, dass $\tau(\omega) = \tau(\omega')$ ist. (4)

Aufgabe 2. Sei $H \in (0,1)$ und X ein reellwertiger, zentrierter Gaußprozeß zur Kovarianzfunktion

$$\rho(s,t) := \mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \tfrac{1}{2}\big(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\big), \quad s,t \geq 0.$$

Zeige:

(i) X hat stationäre Zuwächse, die im Fall $H = \frac{1}{2}$ auch unabhängig sind. (2)

(ii) X ist stetig modifizierbar. (2)

(iii) Für jedes $c > 0$ sind die Prozesse $(X_{ct})_{t\geq 0}$ und $(c^H X_t)_{t\geq 0}$ verteilungsgleich. (1)

(iv) X ist an jeder Stelle $t \geq 0$ fast sicher nicht differenzierbar: Es gilt

$$\limsup_{h\to 0} \left| \frac{X_{t+h} - X_t}{h} \right| = \infty \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

(Anleitung: Zu $M > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ betrachte die Ereignisse

$$A_n := \left\{ \omega \in \Omega : \sup_{h \in (0, \frac{1}{n}] \cap \mathbb{Q}} \left| \frac{X_{t+h} - X_t}{h} \right| > M \right\}$$

und verwende (iii), um $\mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$ zu zeigen.) (3)

(Hinweis: Verwende den Stetigkeitssatz von Kolmogorov:
Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein $\mathbb{R}^d$-wertiger stochastischer Prozeß. Es gebe Konstanten $\beta, \gamma, M > 0$, so dass

$$\mathbb{E}\,\|X_t - X_s\|^{\beta} \leq M\,|t-s|^{1+\gamma} \quad \forall s,t \geq 0$$

erfüllt ist. Dann existiert eine stetige Modifikation von X, die lokal Hölder-stetig von jeder Ordnung $\delta \in (0, \frac{\beta}{\gamma})$ ist.)

Aufgabe 3. Sei $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit folgender Eigenschaft:
Für jede stetige Funktion $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ und jede Nullfolge $(t_0^n, \dots, t_{k_n}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Partitionen von $[0,1]$ (d.h. $0 = t_0^n < \dots < t_{k_n}^n = 1$ stets und $\max_{1\le i\le k_n}(t_i^n - t_{i-1}^n) \to 0$) existiert

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} h(t_{i-1}^n)(F(t_i^n) - F(t_{i-1}^n)).$$

Zeige, dass F von beschränkter Variation ist. (4)

(Hinweis: Verwende den Satz von Banach-Steinhaus:
Seien X, Y Banachräume, $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine Familie beschränkter linearer Operatoren von X nach Y, so dass $\sup_{\alpha\in A} \|T_\alpha x\| < \infty$ für alle $x \in X$. Dann ist $\sup_{\alpha\in A} \|T_\alpha\| < \infty$.)

Abgabe: Dienstag, 23.04.2002