Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik
Prof. Dr. Peter Imkeller

Blatt 10
SS 2002

Übungen zur stochastischen Analysis

Aufgabe 35. Sei B eine eindimensionale Brownsche Bewegung und $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$. Zeige:

$$\int_0^t h(s)\, dB_s = h(t)B_t - \int_0^t h'(s) B_s\, ds. \qquad (4)$$

Aufgabe 36. Sei $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ein stetiges lokales Martingal mit $X_0 = 0$ und existierender quadratischer Variation $\langle X \rangle$ (z.B. X Itô-Prozeß). Zeige:

(i) Es gibt eine Nullmenge $N \in \mathcal{F}$, so dass für $\omega \in \Omega \setminus N$ und $0 \leq t_1 \leq t_2$ gilt:

$$\langle X \rangle_{t_1}(\omega) = \langle X \rangle_{t_2}(\omega) \Rightarrow X_t(\omega) = X_{t_1}(\omega), \quad t \in [t_1, t_2]. \qquad (4)$$

(ii) Für das stochastische Exponential $\mathcal{E}(X)_t = \exp(X_t - \frac{1}{2}\langle X \rangle_t)$ stimmt die Menge $\{\mathcal{E}(X)_\infty = 0\}$ bis auf eine Nullmenge mit $\{\langle X \rangle_\infty = \infty\}$ überein.
(Hinweis: Es gilt $\mathcal{E}(X)_t = \mathcal{E}(\frac{1}{2}X)_t^2 \exp(-\frac{1}{4}\langle X \rangle_t)$.) (4)

Aufgabe 37. Beweise mit Hilfe der Brownschen Bewegung und der Itô-Formel den **Satz von Liouville:** Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt, so ist f konstant. (4)

Aufgabe 38. Sei W eine eindimensionale Brownsche Bewegung, und seien $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, und X meßbar, adaptiert mit

$$\mathbb{E} \int_0^t |X_s|^{2m}\, ds < \infty, \quad t > 0.$$

Zeige:

$$\mathbb{E} \left| \int_0^t X_s\, dW_s \right|^{2m} \leq (m(2m-1))^m t^{m-1}\, \mathbb{E} \int_0^t |X_s|^{2m}\, ds.$$

(Hinweis: Wende auf das Martingal $M_t = \int_0^t X_s\, dW_s$ die Itô-Formel für eine geeignete Funktion an.) (4)

Abgabe: Dienstag, 25.06.2002