Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik
Prof. Dr. Peter Imkeller

Blatt 12
SS 2002

Übungen zur stochastischen Analysis

Aufgabe 43. Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet und seien $g : D \to \mathbb{R}$, $f : \partial D \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Zeige, dass jede Lösung $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ des *Poisson-Problems*

$$\tfrac{1}{2}\Delta u = -g \quad \text{in } D, \qquad u = f \quad \text{auf } \partial D$$

eine Darstellung

$$u(x) = \mathbb{E}_x \left[f(W_{\tau_D}) + \int_0^{\tau_D} g(W_s)\, ds \right], \quad x \in D,$$

besitzt. Dabei ist W eine d-dimensionale Brownsche Bewegung mit $\mathbb{P}_x(W_0 = x) = 1$ und

$$\tau_D = \inf\{t \geq 0 : W_t \notin D\}$$

ihre Austrittszeit aus D. (Hinweis: Zeige, dass $M_t = u(W_{t \wedge \tau_D}) + \int_0^{t \wedge \tau_D} g(W_s)\, ds$ ein gleichgradig integrierbares Martingal ist.) (4*)

Aufgabe 44. Sei $B = (B^{(1)}, \ldots, B^{(d)})$ eine d-dimensionale Brownsche Bewegung und $X = (X^{(1)}, \ldots, X^{(d)})$ die Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = b(X_t)\, dt + \sigma(X_t) \cdot dB_t, \quad t \geq 0, \quad X_0 = x \in \mathbb{R}^d,$$

mit stetigen, beschränkten Koeffizienten $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d \times d}$. Bestimme die Grenzwerte

$$\lim_{t \to 0+} \frac{1}{t}\, \mathbb{E}(X_t^{(i)} - x_i), \quad \lim_{t \to 0+} \frac{1}{t}\, \mathbb{E}(X_t^{(i)} - x_i)(X_t^{(j)} - x_j), \quad i, j = 1, \ldots, d. \qquad (4^*)$$

Aufgabe 45. Sei B eine eindimensionale Brownsche Bewegung, $T > 0$ und $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ ein stetiges Martingal bezüglich der Standardfiltration $(\mathcal{F}_t)$ von B. Zeige: Es gibt ein $\varphi \in L^2_{\text{loc}}$, so dass

$$M_t = \int_0^t \varphi(\cdot, s)\, dB_s, \quad t \in [0, T]. \qquad (4^*)$$

Aufgabe 46. Zeige: Jedes lokale Martingal bezüglich der Brownschen Standard-Filtration besitzt eine stetige Version. (4*)

Aufgabe 47. Sei B eine komplexe Brownsche Bewegung, f meromorph in $\mathbb{C}$ mit Polstellenmenge A, und sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus A$. Zeige: $f(B)$ geht durch einen Zeitwechsel aus einer bei $f(z_0)$ gestarteten Brownschen Bewegung hervor. (4*)

Abgabe: Donnerstag, 18.07.2002