Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik
Prof. Dr. Peter Imkeller

Blatt 2
SS 2002

Übungen zur stochastischen Analysis

Aufgabe 4. Sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ eine Folge unabhängiger, $\mathcal{N}(0,1)$-verteilter Zufallsgrößen und

$$B_t = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n \lambda_n G_n(t)$$

die zugehörige (aus der Vorlesung bekannte) Wavelet-Darstellung der Brownschen Bewegung auf $[0,1]$. Dazu definieren wir einen weiteren stochastischen Prozeß (die *Brownsche Brücke*)

$$U_t := \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \lambda_n G_n(t), \quad t \in [0,1].$$

Zeige:

(i) $U_t = B_t - tB_1$ für alle $t \in [0,1]$. (2)

(ii) $\mathrm{Cov}(U_s, U_t) = s(1-t)$ für $0 \leq s \leq t \leq 1$. (1)

(iii) Bestimme Funktionen $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ und $h : [0,1] \to [0,1]$, so dass die Kovarianzfunktion des durch

$$X_t := g(t) B_{h(t)}$$

definierten Prozesses mit der von U übereinstimmt. (3)

(iv) Der durch

$$Y_t := (1+t) U_{t/(1+t)}, \quad t \geq 0$$

definierte stochastische Prozeß ist eine Brownsche Bewegung auf $[0,\infty)$. (2)

Aufgabe 5. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und τ eine Stoppzeit.

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \ \forall\, t \geq 0\}$$

heißt σ-Algebra der τ-Vergangenheit. Zeige:

(i) $\mathcal{F}_\tau$ ist in der Tat eine σ-Algebra, und τ ist $\mathcal{F}_\tau$-meßbar. (2)

(ii) Ist σ eine weitere Stoppzeit, so ist auch $\sigma \wedge \tau$ eine Stoppzeit, und es gilt $\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$. Jede der Mengen $\{\tau < \sigma\}$, $\{\tau \leq \sigma\}$, $\{\tau = \sigma\}$ ist in $\mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$ enthalten. (3)

(iii) Sei Y eine integrierbare Zufallsgröße. Dann gilt $\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_\tau] = \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma}]$ $\mathbb{P}$-f.s. auf $\{\tau \leq \sigma\}$. (2)

Aufgabe 6. Finde einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ und einen darauf definierten stetigen adaptierten Prozeß $(X_t)_{t\geq 0}$ sowie eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}$, so dass die Ersteintrittszeit $\tau_U := \inf\{t \geq 0 : X_t \in U\}$ keine Stoppzeit, sondern nur eine Optionszeit ist (d.h. $\{\tau_U < t\} \in \mathcal{F}_t$ für alle $t \geq 0$). (4)

Aufgabe 7.

(i) Zeige: Ist $(W_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung, so ist

$$X_t^\alpha := \exp(\alpha W_t - \tfrac{\alpha^2}{2}t), \quad t \geq 0 \qquad (*)$$

für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Martingal. (2)

(ii) Beweise auch die folgende Umkehrung dieser Aussage:
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und $W = (W_t)_{t\geq 0}$ ein reellwertiger, stetiger, bezüglich $(\mathcal{F}_t)$ adaptierter Prozeß mit $W_0 = 0$. Zeige:
Ist der durch (*) definierte Prozeß X_t^α für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Martingal, so ist W eine Brownsche Bewegung bezüglich $(\mathcal{F}_t)$ (siehe die untenstehende Definition). (Hinweis: Ist Y eine Zufallsgröße, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine Unter-σ-Algebra und $\mathbb{E}[e^{-\lambda Y}|\mathcal{G}]$ für λ in einer Nullumgebung konstant und endlich, so ist Y unabhängig von $\mathcal{G}$.) (4)

Definition. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Ein reellwertiger stochastischer Prozeß $W = (W_t)_{t\geq 0}$ heißt Brownsche Bewegung bezüglich $(\mathcal{F}_t)$, wenn gilt:

(i) $W_0 = 0$,

(iii) für $0 \leq s < t$ ist $W_t - W_s$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$ („W hat $(\mathcal{F}_t)$-unabhängige Zuwächse."),

(iii) für $0 \leq s < t$ ist $W_t - W_s$ $\mathcal{N}(0, t-s)$-verteilt,

(iv) $t \mapsto W_t(\omega)$ ist stetig für alle $\omega \in \Omega$.

(Eine Brownsche Bewegung im Sinne der Definition aus der Vorlesung ist also stets eine Brownsche Bewegung bezüglich ihrer kanonischen Filtration.)

Abgabe: Dienstag, 30.04.2002