Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik
Prof. Dr. Peter Imkeller

Blatt 3
SS 2002

Übungen zur stochastischen Analysis

Aufgabe 8. Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung, $A > 0$ und $\tau_A := \inf\{t \geq 0 : |W_t| = A\}$. Berechne $\mathbb{E}[\tau^2]$.
(Hinweis: Verwende die Martingaleigenschaft des Prozesses $X_t^\alpha = \exp(\alpha W_t - \frac{\alpha^2}{2} t)$, um die Laplace-Transformierte von τ zu bestimmen.) (4)

Aufgabe 9. Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung und

$$S_t := \sup_{0\leq s\leq t} B_t, \quad t \geq 0.$$

Zeige: Für $a > 0$ ist

$$\mathbb{P}(S_t \geq at) \leq \exp(-\tfrac{1}{2}a^2 t).$$

(4)

Aufgabe 10. Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine d-dimensionale Brownsche Bewegung. Zeige:

(i) Für jedes $\vartheta \in \mathbb{R}^d$ mit $\|\vartheta\| = 1$ ist $W_t^\vartheta := \langle \vartheta, B_t \rangle$, $t \geq 0$, eine eindimensionale Brownsche Bewegung. (1)

(ii) Für $\delta > 0$ gilt

$$P\left[\sup_{0\leq s\leq t} |B_s| \geq \delta\right] \leq 2d \exp\left(-\frac{\delta^2}{2dt}\right).$$

(Hinweis: Verwende (i) und Aufgabe 9.) (3)

Aufgabe 11. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein reellwertiger, stetiger, bezüglich $(\mathcal{F}_t)$ adaptierter Prozeß, so dass $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0)$ für jede beschränkte Stopzeit τ gilt (insbesondere sollen die Erwartungswerte existieren).
Zeige, dass X ein Martingal ist. (4)

Abgabe: Dienstag, 07.05.2002