Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik
Prof. Dr. Peter Imkeller

Blatt 4
SS 2002

Übungen zur stochastischen Analysis

Aufgabe 12. Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Definiere

$$X_t := \begin{cases} 0, & t = 0, \\ tW_{1/t}, & t > 0. \end{cases}$$

Zeige: X ist eine Brownsche Bewegung.
(Hinweis: Die einzige Schwierigkeit besteht darin zu zeigen, dass X stetig im Nullpunkt ist. Dazu betrachte zu $\varepsilon > 0$ das Martingal(?) $Y_t = X_{t+\varepsilon} - X_\varepsilon$, $t \geq 0$.) (4)

Aufgabe 13. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges, nicht-negatives Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_t)$ mit $\lim_{t\to\infty} X_t = 0$ $\mathbb{P}$-f.s.
Zeige: Für $s \geq 0$, $b > 0$ gilt:

(i) $\mathbb{P}\left[\sup_{t>s} X_t \geq b \middle| \mathcal{F}_s\right] = \frac{1}{b} X_s$ $\mathbb{P}$-f.s. auf $\{X_s < b\}$, (3)

(ii) $\mathbb{P}(\sup_{t>s} X_t \geq b) = \mathbb{P}(X_s \geq b) + \frac{1}{b}\,\mathbb{E}(X_s \mathbf{1}_{\{X_s<b\}})$. (1)

Aufgabe 14. Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein nicht-negatives Supermartingal mit $\mathbb{E}(\lim_{n\to\infty} X_n) = \mathbb{E}(X_0) < \infty$. Zeige, dass X gleichgradig integrierbar ist.

Aufgabe 15.

(i) Sei $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ lokal von beschränkter Variation, d.h. für jedes $t \geq 0$ sei

$$V(t) \ := \sup_{0=t_0\leq\ldots\leq t_n=t} \sum_{i=1}^{n} |F(t_i) - F(t_{i-1})| \ < \ \infty.$$

Zeige: Mit F ist auch V rechtsstetig bzw. stetig. (2)

(ii) Sei A ein rechtsstetiger adaptierter Prozeß, dessen Pfade lokal von beschränkter Variation sind. Zeige: Der Prozeß

$$V_t \ := \sup_{0=t_0\leq\ldots\leq t_n=t} \sum_{i=1}^{n} |A_{t_i} - A_{t_{i-1}}|, \quad t \geq 0,$$

ist ebenfalls adaptiert. (2)

(iii) Sei M ein stetiges Martingal, dessen Pfade lokal von beschränkter Variation sind. Zeige, dass $\mathbb{P}(\forall t \geq 0 : M_t = M_0) = 1$ ist.
(Hinweis: O.B.d.A. sei $M_0 = 0$. Sei V der zu M gehörige Variationsprozeß. Betrachte zunächst den Fall, dass M und V beschränkt sind. Um zu zeigen, daß $\mathbb{E}(M_t^2) = 0$ für festes t überlegt man sich, daß für $0 = t_0 < \ldots < t_n = t$ gilt: $\mathbb{E}(M_t^2) = \mathbb{E}(\sum_{i=1}^n (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2)$. Die rechte Seite dieser Gleichung kann beliebig klein gemacht werden, wenn man eine genügend feine Partition wählt.
Den allgemeinen Fall führt man mit Hilfe der Stoppzeiten $\tau_n := \inf\{t \geq 0 \; : \; |M_t| \geq n \text{ oder } V_t \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$, auf den beschränkten Fall zurück.) (4)

Abgabe: Dienstag, 14.05.2002