Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik
Prof. Dr. Peter Imkeller

Blatt 5
SS 2002

Übungen zur stochastischen Analysis

Aufgabe 16. Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung. Berechne die Varianzen von

$$\int_0^t |B_s|^{1/2}\, dB_s \quad \text{und} \quad \int_0^t (B_s+s)^2\, dB_s.$$

(4)

Aufgabe 17. Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung und $I_1(t) := \int_0^t B_s\, ds$, $I_2(t) := \int_0^t B_s^2\, ds$, $t \geq 0$. Berechne $\mathbb{E}[I_j(t)]$, $\operatorname{Var}[I_j(t)]$, $j = 1, 2$. (4)

Aufgabe 18. Sei B eine Brownsche Bewegung, $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ und $X_t := \int_0^t f(s)\, dB_s$. Zeige, dass das "stochastische Exponential"

$$\mathcal{E}(X)_t := \exp\left(\int_0^t f(s)\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t f(s)^2\, ds\right), \quad t \geq 0,$$

von X ein Martingal ist (bezüglich der Brownschen Standardfiltration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$).
(Hinweis: Zeige, dass X $(\mathcal{F}_t)$-unabhängige Zuwächse hat, und dass $X_t - X_s$ für $s \leq t$ gemäß $N(0, \int_s^t f(u)^2\, du)$ verteilt ist. Dazu betrachte zunächst Elementarfunktionen f.) (4)

Aufgabe 19. Für eine Brownsche Bewegung B sei

$$L_t(\omega) := \sup\{s \in [0,t] : B_s(\omega) = 0\}, \quad t > 0,$$

die letzte Besuchszeit in 0 vor der Zeit t. Zeige:

$$\mathbb{P}(L_t \leq s) = \frac{1}{\pi}\int_0^{s/t} \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{s}{t}}.$$

(4)

Abgabe: Dienstag, 21.05.2002