Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik
Prof. Dr. Peter Imkeller

Blatt 6
SS 2002

Übungen zur stochastischen Analysis

Aufgabe 20. Sei (X_t, Y_t), $t \geq 0$, eine zweidimensionale Brownsche Bewegung, $A > 0$ und $\tau := \inf\{t \geq 0 : |X_t| = A\}$. Zeige, dass Y_τ die Dichte

$$\frac{d\,\mathbb{P}^{Y_\tau}}{d\boldsymbol{\lambda}}(y) = \frac{1}{2A\cosh\left(\frac{\pi y}{2A}\right)}, \quad y \in \mathbb{R}$$

besitzt. (4*)

Aufgabe 21. Ein (stetiger) adaptierter Prozeß $X = (X_t)_{t\geq 0}$ auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ heißt *lokales Martingal*, falls eine Folge $(\tau_n)_{n\geq 0}$ von Stoppzeiten mit $\tau_n \to \infty$ $\mathbb{P}$-fast sicher existiert, so dass der Prozeß $(X_{t\wedge\tau_n})_{t\geq 0}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Martingal ist.
Sein nun X ein stetiges lokales Martingal. Zeige:

(i) Ist τ eine Stoppzeit, so ist auch $(X_{t\wedge\tau})_{t\geq 0}$ ein lokales Martingal. (2*)

(ii) Ist $X_t \geq 0$ für alle $t \geq 0$, so ist X ein Supermartingal. (2*)

(iii) X ist genau dann ein Martingal, wenn die Menge

$$\mathcal{M}(X, c) = \{X_\tau : \tau\ (\mathcal{F}_t)\text{-Stoppzeit mit } \tau \leq c\}$$

für jedes $c > 0$ gleichgradig integrierbar ist. (4*)

Aufgabe 22. Sei $(A_t)_{t\geq 0}$ ein beschränkter, stetiger, wachsender reellwertiger Prozeß mit $A_0 = 0$ auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$, und sei Z eine beschränkte Zufallsgröße. Zeige:

$$\mathbb{E}(ZA_\infty) = E\left(\int_0^\infty \mathbb{E}\left[Z\middle|\mathcal{F}_t\right]\, dA_t\right).$$

(4*)

Abgabe: Dienstag, 28.05.2002