Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik
Prof. Dr. Peter Imkeller

Blatt 7
SS 2002

Übungen zur stochastischen Analysis

Aufgabe 23. Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung und Z eine von B unabhängige nichtnegative Zufallsgröße. Sei weiterhin $X_t := B_{tZ}$, $t \geq 0$, und $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ die kleinste Filtration, die den üblichen Bedingungen genügt und bezüglich der X adaptiert ist. Zeige: X ist ein lokales Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_t)$. Gilt zusätzlich $\mathbb{E}\sqrt{Z} < \infty$, so ist X ein Martingal. (4)

Aufgabe 24. Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges reellwertiges Martingal und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Zeige, dass $Y_t := \varphi(X_t)$, $t \geq 0$ ein lokales Submartingal ist. Zeige an einem Beispiel, dass Y i.a. kein Submartingal ist. (4)

Aufgabe 25. Sei B eine eindimensionale Brownsche Bewegung und $X_t = B_t + ct$ eine *Brownsche Bewegung mit Drift* $c \in \mathbb{R}$. Für $x > 0$ sei $\tau_x := \inf\{t \geq 0 : X_t = x\}$. Berechne $\mathbb{P}(\tau_x) < \infty$. (4)

Aufgabe 26. Für eine Brownsche Bewegung $(B_t)_{0\leq t\leq 1}$ auf $[0,1]$ sei $U_t = B_t - tB_1$ die zugehörige Brownsche Brücke. Berechne die Verteilungsfunktion von $U^* := \sup_{0\leq t\leq 1} U_t$. (Hinweis: $Y_t := (1+t)U_{t/(1+t)}$ ist eine Brownsche Bewegung auf $[0,\infty)$. Verwende Aufgabe 25.) (4)

Abgabe: Dienstag, 04.06.2002