Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik
Prof. Dr. Peter Imkeller

Blatt 8
SS 2002

Übungen zur stochastischen Analysis

Aufgabe 27. Sei B eine d-dimensionale Brownsche Bewegung der Dimension $d \geq 3$ und $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Ferner sei $\tau_r := \inf\{t \geq 0 : \|B_t - x\| = r\}$ für $r \geq 0$.
Zeige: Für $r \in (0, |x|)$ ist $\mathbb{P}(\tau_r < \infty) = \left(\frac{r}{\|x\|}\right)^{d-2}$.
(Hinweis: Seien $0 < r < \|x\| < R$ und $f(z) = \|z - x\|^{2-d}$. Betrachte $\mathbb{E}(f(B_{\tau_r \wedge \tau_R}))$ und führe den Grenzübergang $R \to \infty$ durch. Bedeutet dies, dass ein betrunkener Vogel nicht nach Hause findet?) (4)

Aufgabe 28. Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine dreidimensionale Brownsche Bewegung und $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Zeige, dass

$$X_t := \frac{1}{\|B_t + x\|}, \quad t \geq 0$$

ein lokales Martingal, jedoch kein Martingal ist. (4)

Aufgabe 29. Für $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ seien die *Hermite-Polynome* definiert durch

$$H_n(t,x) := \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} e^{\alpha x - \frac{1}{2}\alpha^2 t} \Big|_{\alpha = 0}$$

(also $e^{\alpha x - \frac{1}{2}\alpha^2 t} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(t,x)\alpha^n$). Zeige:

(i) $x \mapsto H_n(t,x)$ ist ein Polynom vom Grad n mit führendem Term $\frac{x^n}{n!}$. (2)

(ii) Für $n, m \in \mathbb{N}_0$, $t \geq 0$ ist

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(t,x) H_m(t,x)\ \mathcal{N}(0,t)(dx) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für} \quad n \neq m \\ \frac{t^n}{n!} & \text{für} \quad n = m. \end{cases}$$

(2)

(iii) Für $t > 0$ ist die Folge $\left(\sqrt{\frac{n!}{t^n}} H_n(t,\cdot)\right)_{n \geq 0}$ eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathcal{N}(0,t))$. (2)

Aufgabe 30. Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung. Zeige: Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist der Prozeß $(H_n(t, B_t))_{t \geq 0}$ ein Martingal. (Hinweis: Zeige, dass jedes H_n die Wärmeleitungsgleichung $u_t + \frac{1}{2}u_{xx} = 0$ löst und verwende die Itô-Formel.) (4)

Abgabe: Dienstag, 11.06.2002