Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik
Prof. Dr. Peter Imkeller

Blatt 9
SS 2002

Übungen zur stochastischen Analysis

Aufgabe 31. Sei Y ein Itô-Prozeß der Form $Y_t = \int_0^t X_s \, dB_s$ und

$$Z_t := \exp(Y_t - \tfrac{1}{2}\langle Y \rangle_t) = \exp\left(\int_0^t X_s \, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t X_s^2 \, ds\right), \quad t \geq 0$$

das stochastische Exponential von Y. Zeige:

(i) Z genügt der stochastischen Integralgleichung
$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s X_s \, dB_s, \quad t \geq 0.$ (1)

(ii) $U_t := 1/Z_t$ genügt der Gleichung
$U_t = 1 + \int_0^t U_s X_s^2 \, ds - \int_0^t U_s X_s \, dB_s, \quad t \geq 0.$ (3)

Aufgabe 32. Sei $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ein Itô-Prozeß und $A_t(\omega) = \int_0^t a_s(\omega)\, ds$, wobei $a : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$, $(t,\omega) \mapsto a_t(\omega)$, meßbar, adaptiert mit $\int_0^t |a_s| \, ds < \infty$ $\mathbb{P}$-f.s. für alle $t \geq 0$. Zeige: Ist

$$M_t^{(\alpha)} := \exp\left(\alpha X_t - \frac{\alpha^2}{2} A_t\right), \quad t \geq 0$$

für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ ein lokales Martingal, so ist auch X ein lokales Martingal mit quadratischer Variation $\langle X \rangle = A$. (Hinweis: Differenziere nach α bei $\alpha = 0$.) (4)

Aufgabe 33. Sei $M = (M_t)_{t \geq 0}$ ein Itô-Prozeß und ein lokales Martingal mit $M_0 = 0$ und $M_t^* := \sup_{s \leq t} M_s$. Zeige:

(i) $\mathbb{P}(M_\infty^* \geq x, \langle M \rangle_\infty \leq y) \leq \exp(-\frac{x^2}{2y}), \quad x, y > 0.$ (2)

(ii) Es gebe $c > 0$ mit $\langle M \rangle_t \leq ct$ für alle $t \geq 0$. Dann gilt für $a > 0$

$$\mathbb{P}(M_t^* \geq at) \leq \exp(-\tfrac{1}{2c} a^2 t).$$

Vergleiche dies mit Aufgabe 9. (2)

Aufgabe 34. Seien X und Y eindimensionale Itô-Prozesse. Die *gemeinsame quadratische Variation* oder *quadratische Kovariation* von X und Y ist definiert durch die Polarisationsformel

$$\langle X, Y \rangle_t := \frac{1}{4}\big(\langle X+Y \rangle_t - \langle X-Y \rangle_t\big), \quad t \geq 0.$$

Ferner ist für $Z := X + iY$ ist die *komplexe quadratische Variation* definiert durch

$$\langle Z\rangle_t := \langle X\rangle_t - \langle Y\rangle_t + 2i\langle X, Y\rangle_t, \quad t \geq 0.$$

Z heißt *konformes lokales Martingal*, falls X und Y lokale Martingale sind und $\langle Z\rangle = 0$ ist.
Zeige: Ist Z ein konformes lokales Martingal und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, so ist auch $f(Z)$ ein konformes lokales Martingal. (4)

Abgabe: Dienstag, 18.06.2002