Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik

Prof. Dr. Peter Imkeller
Dierk Peithmann, Christian Küchler

Blatt 1
SS 2003

Übungen zur Vorlesung "Stochastik I"

Aufgabe 1. Sei Ω eine überabzählbare Menge. Zeige:

a) Das Mengensystem $\mathscr{F} := \{F \subset \Omega : \ F \text{ oder } \Omega \setminus F \text{ ist abzählbar}\}$ ist eine σ-Algebra.

b) Die durch
$$P(F) := \begin{cases} 0, & \text{falls } F \text{ abzählbar,} \\ 1, & \text{falls } \Omega \setminus F \text{ abzählbar,} \end{cases}$$
definierte Mengenfunktion $P : \mathscr{F} \to [0,1]$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Aufgabe 2. Es sei Ω eine nichtleere Menge und $\mathscr{F} := \{F \subset \Omega : \ |F| < \infty\}$ das System der endlichen Teilmengen von Ω. Ferner sei $Q : \mathscr{F} \to [0,1]$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

(i) $Q(F_1 \cup F_2) = Q(F_1) + Q(F_2)$ für alle $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ mit $F_1 \cap F_2 = \emptyset$,

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists F_\varepsilon \in \mathscr{F} : \ Q(F_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$.

Zeige, dass es genau ein diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $\mathcal{P}(\Omega)$ mit $P|\mathscr{F} = Q$ gibt. (Ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $\mathcal{P}(\Omega)$ heißt *diskret*, falls es eine abzählbare Menge $\Omega_0 \subset \Omega$ mit $P(\Omega_0) = 1$ gibt.)

Aufgabe 3. Zeige, dass es kein Wahrscheinlichkeitsmaß $P : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \{0,1\}$ mit $P(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt.

Aufgabe 4. Sei Ω eine nichtleere Menge. Ein Mengensystem $\mathscr{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt *Dynkin-System*, falls gilt:

(i) $\Omega \in \mathscr{F}$,

(ii) $A, B \in \mathscr{F}$, $A \subset B \Rightarrow B \setminus A \in \mathscr{F}$,

(iii) $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$, $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkt $\Rightarrow \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$.

Für $\mathscr{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ sei $\mathcal{D}(\mathscr{E})$ das kleinste Dynkin-System, das $\mathscr{E}$ enthält. Zeige:
Ist $\mathscr{E}$ durchschnittstabil, d.h. aus $E_1, E_2 \in \mathscr{E}$ folgt $E_1 \cap E_2 \in \mathscr{E}$, so gilt
$$\mathcal{D}(\mathscr{E}) = \sigma(\mathscr{E}).$$

Abgabe: Montag, 05.05.2003 (Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.)