Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik
Prof. Dr. Peter Imkeller
Dierk Peithmann, Christian Küchler

Blatt 2
SS 2003

Übungen zur Vorlesung "Stochastik I"

Aufgabe 5. (4 Punkte)
Zeige, dass es keine σ-Algebra gibt, die aus abzählbar unendlich vielen Elementen besteht. (Hinweis: Sei $(\Omega, \mathscr{F})$ ein meßbarer Raum und $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{E})$. Ist $\mathscr{E}$ abzählbar unendlich, so ist $\mathscr{F}$ überabzählbar.)

Aufgabe 6. (2+2+3 Punkte)

a) Es sei Ω eine nichtleere Menge, $\mathscr{F}$ eine σ-Algebra über Ω und $A \subset \Omega$. Zeige:

$$\sigma(\mathscr{F} \cup \{A\}) = \{(B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A^c) : \ B_1, B_2 \in \mathscr{F}\}.$$

b) Sei $\Omega := \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ und $\mathscr{F} := \overline{\mathscr{B}} := \sigma(\mathscr{B} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\})$. Zeige, dass $\overline{\mathscr{B}}$ aus allen Mengen der Form

$$B, B \cup \{+\infty\}, B \cup \{-\infty\}, B \cup \{\pm\infty\}$$

mit $B \in \mathscr{B}$ besteht.

c) Sei $(\Omega, \mathscr{F})$ ein meßbarer Raum. Eine *numerische Funktion* ist eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, also eine $(\mathscr{F}, \overline{\mathscr{B}})$-meßbare Funktion.
Sei nun $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, eine Folge *reeller* Zufallsvariablen. Zeige, dass

$$\limsup_{n\to\infty} X_n, \ \liminf_{n\to\infty} X_n$$

numerische Funktionen sind, und dass jede der Mengen

$$\{X_1 = X_2\}, \{\lim_{n\to\infty} X_n \text{ existiert}\}, \{X_0 = \lim_{n\to\infty} X_n\}$$

in $\mathscr{F}$ liegt. Folgere hieraus, dass $Y(\omega) := \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$ eine Zufallsvariable ist, falls dieser Grenzwert für alle $\omega \in \Omega$ existiert.

Aufgabe 7. (3+3 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathscr{F}) = (\mathbb{R}, \mathscr{B})$ und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeige:

a) Ist X monoton wachsend, so ist X eine Zufallsvariable.

b) Ist X differenzierbar, so ist X' eine Zufallsvariable.

Aufgabe 8. (6 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathscr{F})$ ein meßbarer Raum mit $\Omega \neq \emptyset$ und $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen, derart dass $P(A) := \lim_{n\to\infty} P_n(A)$ für alle $A \in \mathscr{F}$ existiert. Zeige, dass P ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

Nimm dazu an, dass dies nicht der Fall ist, und dass es eine Folge $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ von Mengen $A_n \in \mathscr{F}$, $n \in \mathbb{N}$, gibt mit $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, für die jedoch $\lim_{n\to\infty} P(A_n) =: \eta > 0$ gilt. Konstruiere den gewünschten Widerspruch durch Herleiten der folgenden Aussagen:

i) Zu $0 < \varepsilon < \frac{1}{5}\eta$ existieren Teilfolgen $(A_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(P_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ sowie ein $N \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

   (1) $P(A_N \setminus A_n) < \varepsilon \ \forall n > N$,

   (2) $P_{i_k}(A_{n_k}) < \varepsilon$, $P_{i_k}(A_N \setminus A_{n_{k-1}}) < \varepsilon$ und $P_{i_k}(A_N \setminus A_{n_k}) > \eta - 2\varepsilon$ für $k \in \mathbb{N}$.

ii) Für $B_k := A_{n_{k-1}} \setminus A_{n_k}$ gilt $P_{i_k}(B_k) > \eta - 3\varepsilon$ und $P_{i_k}(A_N \setminus B_k) < 2\varepsilon$, $k \in \mathbb{N}$.

iii) Betrachte nun die Menge $B = \cup_{k=1}^{\infty} B_{2k-1}$, um einen Widerspruch zu erhalten.

Abgabe: Montag, 12.05.2003