Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik
Prof. Dr. Peter Imkeller
Dierk Peithmann, Christian Küchler

Blatt 3
SS 2003

Übungen zur Vorlesung "Stochastik I"

Aufgabe 9. (3 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Beweise die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) P ist $\{0,1\}$-wertig.

(ii) Zu jeder Zufallsvariablen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit $P(X = c) = 1$.

Aufgabe 10. (3+3 Punkte)
Zeige, dass f eine Wahrscheinlichkeitsdichte und X eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathscr{B}_\Omega)$ ist, falls

a) $\Omega = [0, \infty[$, $f(\omega) = e^{-\omega}$ und $X(\omega) = (\omega/\alpha)^{1/\beta}$ für $\omega \in \Omega$ und $\alpha, \beta > 0$,

b) $\Omega =]-\pi/2, \pi/2[$, $f(\omega) = 1/\pi$, $X(\omega) = \sin^2 \omega$ für $\omega \in \Omega$.

Sei P das Maß mit Dichte f, d.h. es ist $P(B) = \int_B f(x)\boldsymbol{\lambda}(dx)$ für $B \in \mathscr{B}_\Omega$. Berechne in beiden Fällen die Verteilungsfunktion und die Dichte von X unter P.

Aufgabe 11. (4 Punkte)
Für $n \in \mathbb{N}$ sei X_n negativ binomialverteilt mit Parametern n und $p_n \in (0,1)$, d.h. $P(X_n = k) = \binom{k+n-1}{n-1} p_n^n (1-p_n)^k$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Ferner existiere $\lambda := \lim_{n\to\infty} n(1-p_n)$ in $]0, \infty[$. Zeige:

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

d.h. die X_n sind asymptotisch Poisson-verteilt mit Parameter λ.

Aufgabe 12. (4 Punkte)
Zwei Würfel werden geworfen, bis entweder die Augensumme 5 oder die Augensumme 7 auftritt. Beschreibe dieses Experiment durch Angabe eines geeigneten (diskreten) Wahrscheinlichkeitsraumes und bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass zuerst die Augensumme 5 auftritt.

Aufgabe 13. (2+2+3* Punkte)
Sei $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathscr{N}_P := \{M \subset \Omega \mid \exists N \in \mathscr{F} : M \subset N, P(N) = 0\}$. Zeige:

a) $\overline{\mathscr{F}}_P := \{F \cup M : F \in \mathscr{F}, M \in \mathscr{N}_P, F \cap M = \emptyset\}$ ist eine σ-Algebra.

b) Durch $\overline{P}(F \cup M) := P(F)$ für $F \in \mathscr{F}, M \in \mathscr{N}_P$ mit $F \cap M = \emptyset$ wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\overline{\mathscr{F}}_P$ definiert. (Der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \overline{\mathscr{F}}_P, \overline{P})$ heißt *Vervollständigung* von $(\Omega, \mathscr{F}, P)$.)

c) Es ist

$$\overline{\mathscr{F}}_P = \{F \subset \Omega : P_*(F) = P^*(F)\}.$$

Dabei ist $P_*(F) := \sup\{P(A) : A \subset F, A \in \mathscr{F}\}$ das innere und $P^*(F) := \inf\{P(A) : A \supset F, A \in \mathscr{F}\}$, $F \subset \Omega$, das äußere Maß von P.

Abgabe: Montag, 19.05.2003