Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik
Prof. Dr. Peter Imkeller
Dierk Peithmann, Christian Küchler

Blatt 4
SS 2003

Übungen zur Vorlesung "Stochastik I"

Aufgabe 14. (4 Punkte)
Für $i \in \mathbb{N}$ sei X_i hypergeometrisch verteilt zu den Parametern (n, N_i, m_i), d.h.

$$P(X_i = k) = \frac{\binom{m_i}{k}\binom{N_i - m_i}{n-k}}{\binom{N_i}{n}} \quad \text{für } k = 0, \ldots, n.$$

Ferner gelte $\lim_{i\to\infty} N_i = \lim_{i\to\infty} m_i = \infty$ und $\lim_{i\to\infty} \frac{m_i}{N_i} = p \in [0,1]$. Zeige:

$$\lim_{i\to\infty} P(X_i = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

und interpretiere dies anschaulich.

Aufgabe 15. (3+3 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion.

a) Zeige: Zu jedem $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt es $a, b \in \mathbb{R}$, so dass gilt:

   (i) $f(x_0) = ax_0 + b$,

   (ii) $f(x) \geq ax + b \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Sei $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable, so dass $E(|X|) < \infty$ und $E(|f \circ X|) < \infty$. Zeige:

$$E(f \circ X) \geq f(E(X)).$$

   Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Aufgabe 16. (3+3+3 Punkte)
Sei $\Omega \neq \emptyset$ abzählbar. Für ein (diskretes) Wahrscheinlichkeitsmaß P auf Ω mit Zähldichte $p(\omega) := P(\{\omega\})$ ist die *Entropie* von P definiert durch

$$H(P) := \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) \log p(\omega).$$

(Hierbei sei die Funktion $x \mapsto x \log x$ durch $0 \log 0 := 0$ stetig in den Nullpunkt fortgesetzt.) Ist Q ein weiteres Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω mit Zähldichte q, so heißt

$$H(P|Q) = \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) \log \frac{p(\omega)}{q(\omega)}$$

relative Entropie von P bezüglich Q. (Dabei sei $H(P|Q) := \infty$, falls $p(\omega) > q(\omega) = 0$ für ein $\omega \in \Omega$.) Zeige:

a) Es gilt $H(P|Q) \geq 0$, und es ist $H(P|Q) = 0$ genau dann, wenn $P = Q$ ist.

b) Ist Ω endlich, so maximiert die Laplace-Verteilung auf Ω die Entropie unter allen Wahrscheinlichkeitsmaßen auf Ω.

c) Ist $\Omega = \mathbb{N}$, so maximiert die geometrische Verteilung mit Parameter $p = \frac{1}{m}$ die Entropie unter allen Wahrscheinlichkeitsmaßen auf Ω mit vorgegebenem, festem Erwartungswert m.

Aufgabe 17. (4 Punkte)
Ein Pfeifenraucher hat in jeder seiner Hosentaschen eine Streichholzschachtel. Jedes Mal, wenn er ein Streichholz benötigt, entnimmt er es zufällig aus einer der beiden Taschen. Ursprünglich enthält jede Schachtel N Streichhölzer. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in der anderen Schachtel genau k Hölzer befinden, wenn er feststellt, dass die erste Schachtel leer ist?

Abgabe: Montag, 26.05.2003