Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik
Prof. Dr. Peter Imkeller
Dierk Peithmann, Christian Küchler

Blatt 5
SS 2003

Übungen zur Vorlesung "Stochastik I"

Aufgabe 18. (2+3 Punkte)

Es sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Zeige:

a) Ist X exponentialverteilt, so ist X "gedächtnislos", d.h. für alle $s, t \geq 0$ gilt

$$P(X > s + t | X > s) = P(X > t).$$

b) Folgt umgekehrt aus der Gedächtnislosigkeit auch, dass X exponentialverteilt ist? (Beweis oder Gegenbeispiel.)

Aufgabe 19. (4 Punkte)

Sie haben bei einem großen Fernsehquiz alle Kontrahenten ausgestochen und stehen nun vor der Wahl: sie stehen vor drei verschlossenen Türen und müssen sich für eine entscheiden. Hinter einer dieser Türen befindet sich der Hauptgewinn, ein Auto (Lotus Elise S2 Sport 135R), während sich hinter jeder der beiden anderen Türen eine Niete verbirgt. Sie entscheiden sich für eine Tür. Daraufhin öffnet der Moderator diejenige der beiden übrigen Türen, hinter der sich eine Niete versteckt. (Falls er die Wahl hat, tut er dies "zufällig".) Sie haben nun die Möglichkeit, ihre Entscheidung nochmals zugunsten der anderen verschlossenen Tür zu ändern. Sollten Sie davon Gebrauch machen?

Aufgabe 20. (2+2 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine reelle Zufallsvariable auf Ω. Zeige:

a) Ist X binomialverteilt mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0, 1]$, so gilt

$$E\Big(\frac{1}{X+1}\Big) = \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.$$

b) Ist X Poisson-verteilt zum Parameter $\lambda > 0$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$E(X^n) = \lambda E\big((X+1)^{n-1}\big).$$

Aufgabe 21. (4 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Zeige, dass es keine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ unabhängiger Ereignisse gibt mit

$$0 < P(A_n) = P(A_1) < 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(Eine Familie $(A_i)_{i\in I}$ von Ereignissen in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ heißt *unabhängig*, wenn für $J \subset I$ endlich gilt: $P(\cap_{j\in J} A_j) = \prod_{j\in J} P(A_j)$.)

Aufgabe 22. (2*+1*+1* Punkte)

Sei $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathscr{A}$ eine Algebra über Ω mit $\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{F}$.

a) Zeige, dass zu $\varepsilon > 0$ und $A \in \mathscr{F}$ ein $B \in \mathscr{A}$ mit $P(A \Delta B) < \varepsilon$ existiert.

b) Gilt die obige Approximationseigenschaft auch, wenn man die Algebra $\mathscr{A}$ durch ein durchschnittstabiles Mengensystem ersetzt?

c) Gilt die Approximationseigenschaft auch simultan für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße P und Q auf $\mathscr{F}$?

Abgabe: Montag, 02.06.2003