Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik
Prof. Dr. Peter Imkeller
Dierk Peithmann, Christian Küchler

Blatt 6
SS 2003

Übungen zur Vorlesung "Stochastik I"

Aufgabe 23. (2+3 Punkte)

Betrachte das aus der Vorlesung bekannte Polya'sche Urnenmodell zu den Parametern s, w, c. Sei S_n die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln nach n Zügen. Zeige:

a)
$$P(S_n = l) = \frac{\binom{-s/c}{l}\binom{-w/c}{n-l}}{\binom{-(s+w)/c}{n}} \qquad \text{für } l = 0, \dots, n.$$

Dabei ist für $r \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$ $\binom{r}{k} = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{r-j}{k-j}$ der allgemeine Binomialkoeffizient. Das Wahrscheinlichkeitsmaß P_{S_n} auf $\{0, \dots, n\}$ heißt *Polya-Verteilung* zu den Parametern n, s, w, c.

b) Es ist
$$P(S_n = l) = \int_0^1 \beta_{\frac{s}{c}, \frac{w}{c}}(p)\ \mathcal{B}_{n,p}(\{l\})\ dp \qquad \text{für } l = 0, \dots, n.$$

Dabei ist für $a, b > 0$
$$\beta_{a,b}(x) = B(a,b)^{-1} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \qquad 0 < x < 1,$$
wobei $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$. Das zu $\beta_{a,b}$ gehörige Wahrscheinlichkeitsmaß auf $]0,1[$ heißt Beta-Verteilung zu den Parametern a, b.

Das Polya'sche Urnenmodell ist also äquivalent zu einem Urnenmodell mit Zurücklegen, bei dem zuvor in einem beta-verteilten Zusatzexperiment das Verhältnis zwischen schwarzen und weißen Kugeln festgelegt wird. (Hinweis: $B(a+1,b) = \frac{a}{a+b}B(a,b)$.)

Aufgabe 24. (4 Punkte)

Im Abstand $a > 0$ über einer Geraden befindet sich eine Glühbirne. Diese strahlt gleichmäßig in alle Richtungen, die die Gerade irgendwann treffen. X bezeichne den Auftreffpunkt eines Lichtstrahls auf der Geraden. Zeige, dass X die Verteilungsdichte
$$x \mapsto \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)}, \quad x \in \mathbb{R},$$
besitzt. Das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß heißt *Cauchy-Verteilung* zum Parameter a.

Aufgabe 25. (4 Punkte)

Bestimme die Wahrscheinlichkeit p_k^n dafür, dass eine zufällige Permutation der Menge $\{1, \dots, n\}$ genau $k \in \{0, \dots, n\}$ Fixpunkte hat, und untersuche das Verhalten von p_k^n für $n \to \infty$.

Aufgabe 26. (2+3 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Zeige:

a) Ist $X(\Omega) \subset \mathbb{N}_0$, so gilt
$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k).$$

b) Ist X nichtnegativ, so gilt
$$E(X) = \int_{[0,\infty)} P(X > t)\; \boldsymbol{\lambda}(\,dt).$$

(Beide Seiten können jeweils $+\infty$ sein.)

Aufgabe 27. (1*+1*+3*+2*+2* Punkte)
Sei $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Menge $A \in \mathscr{F}$ heißt P-Atom, wenn $P(A) > 0$ ist und für $B \in \mathscr{F}$ mit $B \subset A$ gilt: $P(B) \in \{0, P(A)\}$. Zeige:

a) Sind A und B P-Atome, die nicht äquivalent sind (d.h. $P(A \triangle B) \neq 0$), so ist $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

b) Es gibt höchstens abzählbar viele paarweise nicht äquivalente P-Atome.

c) Ω läßt sich zerlegen in eine Menge A_0, die kein P-Atom enthält, und abzählbar viele paarweise *disjunkte* P-Atome. (Hinweis: Verwende das Lemma von Zorn.)

d) Zu jedem $\alpha \in [0, P(A_0)]$ existiert eine Menge $A_\alpha \subset A_0$, $A_\alpha \in \mathscr{F}$, mit $P(A_\alpha) = \alpha$.

e) Ist $\mathscr{F}$ zusätzlich abzählbar erzeugt, so existiert zu jedem P-Atom A ein $\mathscr{F}$-Atom B (d.h. $B \in \mathscr{F}$ und $B \supset C \in \mathscr{F} \Rightarrow C \in \{\emptyset, B\}$) mit $P(B) = P(A)$. Allgemein gilt dies nicht (Gegenbeispiel).

Abgabe: Montag, 13.06.2003