Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik
Prof. Dr. Peter Imkeller
Dierk Peithmann, Christian Küchler

Blatt 7
SS 2003

Übungen zur Vorlesung "Stochastik I"

Aufgabe 28. (1+2 Punkte)
Seien X und Y identisch verteilte Zufallsvariablen mit endlicher Varianz.

a) Zeige: $\operatorname{Cov}(X+Y, X-Y) = 0$.

b) Zeige an einem Beispiel, dass $X+Y$ und $X-Y$ i.a. nicht unabhängig sind. (Hinweis: X und Y können unabhängig und gleichverteilt gewählt werden.)

Aufgabe 29. (4 Punkte)
Seien X, Y unabhängige, zum Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilte Zufallsvariablen. Bestimme eine Dichte von $X/(X+Y)$.

Aufgabe 30. (1+4+2 Punkte)
Seien $X_1, \dots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, und sei $F(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$. Ferner sei für $k = 1, \dots, n$

$$X_{[k]} := \min \left\{ \max\{X_{i_1}, \dots, X_{i_k}\} : \ 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \right\}.$$

Zeige:

a) $X_{[k]}$ ist eine Zufallsvariable.

b) $\mathbb{P}(X_{[k]} \leq x) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} F(x)^i (1-F(x))^{n-i} = n\binom{n-1}{k-1} \int_0^{F(x)} t^{k-1}(1-t)^{n-k}\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$

c) Ist F stetig differenzierbar, so besitzt $X_{[k]}$ eine Lebesgue-Dichte. Bestimme diese Dichte.

Aufgabe 31. (2+3 Punkte)
Seien X und Y unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{N}_0$. Bestimme die Verteilung von X, falls

a) $\mathbb{P}\left[X = k \middle| X+Y = n\right] = \frac{1}{n+1}$ für $0 \leq k \leq n$,

b) $\mathbb{P}\left[X = k \middle| X+Y = n\right] = \binom{n}{k} 2^{-n}$ für $0 \leq k \leq n$.

Aufgabe 32. (4 Punkte)
Sei $(N_t)_{t \geq 0}$ ein Poisson-Prozeß zur Intensität $\alpha > 0$, und sei $Z_t := (-1)^{N_t}$. Zeige:

$$\mathbb{P}(Z_s = Z_t) = \frac{1 + e^{-2\alpha(t-s)}}{2} \qquad \text{für } 0 \leq s < t.$$

Abgabe: Montag, 23.06.2003