Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik

Prof. Dr. Peter Imkeller
Dierk Peithmann, Christian Küchler

Blatt 8
SS 2003

Übungen zur Vorlesung "Stochastik I"

Aufgabe 33. (2+1+3 Punkte)
Für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße P und Q auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ ist die *Faltung* $P * Q$ definiert durch

$$P * Q(A) := \int \mathbf{1}_A(x+y)\ P \otimes Q\big(d(x,y)\big), \quad A \in \mathscr{B}.$$

(Für Zufallsvariablen ist also $\mathbb{P}_{X+Y} = \mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y$, falls X und Y unabhängig sind.) Zeige:

a) Besitzt P eine $\boldsymbol{\lambda}$-Dichte f, so ist

$$x \mapsto \int f(x-y)\ Q(dy), \quad x \in \mathbb{R},$$

eine $\boldsymbol{\lambda}$-Dichte von $P * Q$.

b) Ist in a) zusätzlich g eine $\boldsymbol{\lambda}$-Dichte von Q, so ist die *Faltung* von f und g, definiert durch

$$(f * g)(x) = \int f(x-y) g(y) \boldsymbol{\lambda}(dy), \quad x \in \mathbb{R},$$

eine $\boldsymbol{\lambda}$-Dichte von $P * Q$.

c) Seien $\alpha, r_i > 0$ und X_i $(i = 1, 2)$ unabhängige, Γ_{α, r_i}-verteilte Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, d.h.

$$\frac{d\,\mathbb{P}_{X_i}}{d\boldsymbol{\lambda}}(x) = \gamma_{\alpha, r_i}(x) = \frac{1}{\Gamma(r_i)} \alpha e^{-\alpha x} (\alpha x)^{r_i - 1} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei $\Gamma(r) = \int_0^\infty t^{r-1} e^{-t}\, dt$ für $r \in (0, \infty)$. Dann gilt $\mathbb{P}_{X_1 + X_2} = \Gamma_{\alpha, r_1 + r_2}$, d.h. $\Gamma_{\alpha, r_1} * \Gamma_{\alpha, r_2} = \Gamma_{\alpha, r_1 + r_2}$.

Aufgabe 34. (2+4 Punkte)

a) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen. Zeige, dass $X_1^2 + \cdots + X_n^2$ $\Gamma_{\frac{1}{2}, \frac{n}{2}}$-verteilt ist. Eine Gamma-Verteilung mit diesen Parametern bezeichnet man auch als χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden.

b) Speziell für $n = 2$ ist also $X_1^2 + X_2^2$ exponentialverteilt zum Parameter $\frac{1}{2}$. Beweise die folgende Umkehrung dieser Aussage:
Sei U gleichverteilt auf $[0, 2\pi]$, und sei Z exponentialverteilt mit Parameter 1 und unabhängig von U. Dann sind

$$X = \sqrt{2Z} \cos U \qquad \text{und} \qquad Y = \sqrt{2Z} \sin U$$

unabhängig und $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt sind.

Aufgabe 35. (5 Punkte)

Ein fairer Würfel wird unendlich oft geworfen. Die einzelnen Würfe seien voneinander unabhängig. Die Ergebnisfolge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Sei

$$A_n^k := \{\omega \in \Omega : \; X_{n+j}(\omega) = 6 \text{ für } j = 0, \dots, k-1\}$$

das Ereignis, dass ab dem n-ten Wurf eine Sechser-Serie der Länge k auftritt.
Zeige, dass $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n^k) = 1$ ist, d.h. es treten fast sicher unendlich viele Sechser-Serien der Länge k auf. Folgere hieraus, dass sogar fast sicher unendlich viele Sechser-Serien beliebiger Länge auftreten:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \limsup_{n\to\infty} A_n^k\right) = 1.$$

Aufgabe 36. (2+3+2 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{N}_0$ eine Zufallsvariable. Die Funktion

$$g_X : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \mathbb{E}\left(t^X\right),$$

heißt *erzeugende Funktion* von X.

a) Zeige, dass g_X wohldefiniert ist, und dass $\mathbb{P}_X$ durch g_X eindeutig bestimmt ist.

b) Beweise für $k \in \mathbb{N}$ die folgende Gleichung für das k-*te faktorielle Moment* von X:

$$\mathbb{E}\left[X(X-1)\dots(X-k+1)\right] = g_X^{(k)}(1) := \lim_{t\nearrow 1} g_X^{(k)}(t).$$

c) Berechne g_X in den Fällen, dass X Poisson- oder geometrisch verteilt ist.

Abgabe: Montag, 30.06.2003