Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik

Prof. Dr. Peter Imkeller
Dierk Peithmann, Christian Küchler

Blatt 9
SS 2003

Übungen zur Vorlesung "Stochastik I"

Aufgabe 37. (4 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $X, Y \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ mit $\mathrm{Var}(X), \mathrm{Var}(Y) > 0$. Der *Korrelationskoeffizient* von X und Y ist definiert durch

$$\rho(X,Y) := \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}}.$$

Zeige: Ist $|\rho(X,Y)| = 1$, so gibt es eine lineare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $Y = f \circ X$ $\mathbb{P}$-f.s.

Aufgabe 38. (4 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Beweise die Äquivalenz der beiden Aussagen:

(i) Die Folge (X_n) konvergiert $\mathbb{P}$-stochastisch.

(ii) Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} \mathbb{P}(|X_k - X_n| \geq \varepsilon) = 0$.

Aufgabe 39. (4 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $X_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$, $n \in \mathbb{N}$, unabhängig und identisch verteilt. Es gebe ein $\varepsilon > 0$ mit $\mathbb{P}(X_1 < \varepsilon) = 0$. Zeige, dass es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\lim_{n\to\infty} \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\frac{1}{n}} = c \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Aufgabe 40. (2+3+3 Punkte)
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger reellwertiger Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, so dass jedes X_n eine Lebesgue-Dichte f_n besitzt. Ferner sei $N : \Omega \to \mathbb{N}$ eine Zufallsvariable, die von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig ist. Zeige:

a) Die *zufällige Summe*

$$S_N(\omega) := \sum_{n=1}^{N(\omega)} X_n(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

ist eine Zufallsvariable.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N = n)(f_1 * \cdots * f_n)$ ist eine Lebesgue-Dichte von S_N.

c) Seien $\lambda > 0, p \in (0,1)$ und $k \in \mathbb{N}$. Sind in obiger Situation die X_n zusätzlich identisch exponentialverteilt zum Parameter λ, und ist N negativ binomialverteilt zu den Parametern k und p, d.h.

$$\mathbb{P}(N = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}, \quad n \geq k,$$

so ist S_N $\Gamma_{\lambda p,k}$-verteilt.

Abgabe: Montag, 07.07.2003