Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik

Prof. Dr. Peter Imkeller
Dierk Peithmann, Christian Küchler

Blatt 10
SS 2003

Übungen zur Vorlesung "Stochastik I"

Aufgabe 41. (2+2+1 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter reellwertiger Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, deren Erwartungswert *nicht* existiert. Ferner seien $a \in \mathbb{N}$ und $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$. Zeige:

a) $\mathbb{P}(|X_n| > an$ für unendlich viele $n) = 1$.

b) $\mathbb{P}(|S_n| > an$ für unendlich viele $n) = 1$, also $\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{n} = \infty$ $\mathbb{P}$-f.s.

c) Ist $X_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \infty$ $\mathbb{P}$-f.s.

Aufgabe 42. (5 Punkte)
Fluggesellschaften praktizieren üblicherweise das so genannte Überbuchen: Da erfahrungsgemäß einige Passagiere ihren Flug nicht antreten, verkaufen die Fluggesellschaften mehr Tickets als Plätze vorhanden sind. Sie nehmen dabei das Risiko in Kauf, überzählige Passagiere mit Geld entschädigen zu müssen (falls doch zu viele ihren Flug antreten wollen).
Es sei angenommen, dass jeder mitfliegende Fluggast Einnahmen von $a = 300$ € erbringt, während jeder überzählige Passagier für die Fluggesellschaft einen Verlust von $b = 500$ € bedeutet. Jeder gebuchte Platz wird mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0.95$ (unabhängig von den übrigen) in Anspruch genommen. Wieviele Tickets sollte die Fluggesellschaft bei

a) einem Airbus 319 mit $S = 124$ Plätzen,

b) einem Airbus 320 mit $S = 364$ Plätzen

verkaufen, um ihren erwarteten Gewinn zu maximieren?
(Hinweis: Betrachte eine Bernoullifolge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zur Trefferwahrscheinlichkeit p. Bei N verkauften Plätzen läßt sich $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$ als Anzahl der erschienenen Passagiere auffassen. Sei G_N der zugehörige Gewinn. Dann ist

$$G_{N+1} - G_N = a\mathbf{1}_{\{S_N<S\}}X_{N+1} - b\mathbf{1}_{\{S_N\geq S\}}X_{N+1},$$

also $\mathbb{E}(G_{N+1}) \geq \mathbb{E}(G_N)$ genau dann, wenn $\mathbb{P}(S_N < S) \geq \frac{b}{a+b}$ ist.)

Aufgabe 43. (5* Punkte)

Sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Betrachte eine Folge $X_n : \Omega \to I$ unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit Erwartung $m := \mathbb{E}(X_1)$ und Varianz $\sigma^2 := \mathrm{Var}(X_1) \in (0, \infty)$. Zeige:

Ist $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $f'(m) \neq 0$, und ist f'' beschränkt, so gilt

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma f'(m)} \Big[f\Big(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \Big) - f(m) \Big] \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

(Hinweis: Betrachte eine Taylor-Entwicklung von f und verwende die Tschebyschev-Ungleichung.)

Aufgabe 44. (5* Punkte)

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Bernoulli-Folge mit Trefferwahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Zeige, dass für $a \in (p, 1)$ gilt

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \geq a \right) \leq e^{-n h_p(a)},$$

wobei $h_p(a) = a \log \frac{a}{p} + (1-a) \log \frac{1-a}{1-p}$.

(Hinweis: Zeige zunächst, dass $\mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \geq a \right) \leq e^{-nas}\, \mathbb{E}\left(e^{sX_1} \right)^n$ für $s \geq 0$ ist.)

Aufgabe 45. (2*+1*+2* Punkte)

Es seien $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ Folgen reeller Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ mit den Eigenschaften:

(i) $X_n \xrightarrow{d} X_0$ und $Y_n \xrightarrow{d} Y_0$ für $n \to \infty$,

(ii) X_n und Y_n sind unabhängig für jedes $n \in \mathbb{N}_0$.

Zeige:

a) $(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X_0, Y_0)$.

b) Für jede meßbare Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die $\mathbb{P}_{(X_0, Y_0)}$-f.s. stetig ist, gilt

$$h(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} h(X_0, Y_0).$$

c) Auf die Annahme der Unabhängigkeit kann man in b) i.a. nicht verzichten.

Abgabe: Freitag, 18.07.2003