Der stochastische Variationskalkül und Anwendungen in der multiplikativen Ergodentheorie

12. März 1997

In diesem Kurs werden zunächst die Grundlagen des stochastischen Variationskalküls (Malliavin-Kalkül) dargestellt. Er liefert Kriterien für die Glattheit der Verteilungen von ZV en auf *Gaußschen Räumen*. Diese werden angewandt, um Eigenschaften der Verteilungen der *Oseledets-Räume* eines zufälligen dynamischen Systems zu gewinnen, das von einer von Wienerprozessen angetriebenen stochastischen DGL stammt. Diese Räume ersetzen die Eigenräume deterministischer Matrizen in ihrer Bedeutung für das asymptotische Verhalten der Lösungstrajektorien.

Vorausgesetzt werden einige grundlegende Kenntnisse aus der Theorie stochastischer Prozesse und der stochastischen Analysis, die sich unter den folgenden Stichworten zusammenfassen lassen: **die Brownsche Bewegung; die stochastischen Integrale von Ito und Stratonovich bzgl. der Brownschen Bewegung; die Martingalungleichungen von Doob und Burkholder; Existenz und Eindeutigkeit starker Lösungen von stochastischen DGL mit regulären Koeffizienten.**

1 Grundlagen des stochastischen Variationskalküls

Ein W. raum $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ heißt *Gaußsch*, wenn es eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (eine Familie $(X_k)_{1\le k\le n}$) von unabhängigen Gaußschen Einheitsvariablen gibt mit $\sigma(X_n : n \in \mathbf{N})$ $(\sigma(X_k : 1 \le k \le n)) = \mathbf{F}$.

Beispiel 1: Sind $\Omega = C(\mathbf{R}_+; \mathbf{R}^m), \mathbf{F}$ die Borel-Mengen bzgl. gleichmäßiger Konvergenz auf Kompakta, $\mathbf{P}$ das $m-$dimensionale Wienermaß, $W = (W^1, \cdots, W^m)$ der kanonische $m-$dimensionale Wienerprozeß, so ist $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ Gaußsch.

Ist nämlich $(g_i)_{i\in\mathbf{N}}$ eine ONB von $L^2(\mathbf{R}_+)$, so ist eine Abzählung von $W^i(g_j) = \int g_j(s)\, dW^i_s$, $i, j \in \mathbf{N}$, geeignet.

Beispiel 1 liefert den Rahmen, in dem wir den stoch. Variationskalkül später anwenden werden. Deshalb nehmen wir nun an, daß der Gaußsche Raum von unendlich vielen Variablen erzeugt wird. Entwickeln wollen wir den Kalkül vermöge der folgenden kanonischen Repräsentation von ZV über Gaußschen Räumen. Dabei folgen wir Malliavin [16].

Sei $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ die Menge aller reellen Zahlenfolgen, $\pi_n : \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \to \mathbf{R}^n$ die Projektion auf die ersten n Koordinaten, $\mathbf{B}^{\mathbf{N}}$ die von den Projektionen in $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ erzeugte $\sigma-$Algebra. Sei ferner ν die Verteilung von $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $\nu_n = \nu \circ \pi_n^{-1}$, $n \in \mathbf{N}$. Dann gilt offensichtlich

$$\nu_1(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})\, dx, \quad \nu_n = \otimes_{1\leq k\leq n}\, \nu_1, \quad \nu = \otimes_{n\in\mathbf{N}}\, \nu_1.$$

Unter Verwendung des Satzes über monotone Klassen zeigt man, daß zu $\mathbf{F}$-meßbarem F ein $\mathbf{B}^{\mathbf{N}}$-meßbares f gibt mit $F = f((X_n)_{n\in\mathbf{N}})$. Die Abbildung $f \mapsto F$ definiert einen Isomorphismus der L^p-Räume über $(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \mathbf{B}^{\mathbf{N}}, \nu)$ und über $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$. Daher können wir den stochastischen Variationskalkül zunächst auf $L^2(\mathbf{R}^{\mathbf{N}})$ entwickeln, um ihn dann auf $L^2(\Omega)$ zu übertragen.

Im Mittelpunkt der folgenden Überlegungen soll die Frage nach der Glattheit von Verteilungen von ZV en über $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ stehen. Demnach müssen wir Kriterien für die Glattheit von $\nu \circ f^{-1}$ für $f : \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \to \mathbf{R}$ entwickeln. Wir beschränken uns dabei auf die Untersuchung der Absolutstetigkeit bzgl. des Lebesguemaßes λ. Zur Motivation unseres Vorgehens beginnen wir mit dem eindimensionalen Fall, untersuchen also die Frage nach der Existenz einer Dichte für $\nu_1 \circ f^{-1}$ für meßbares $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

1.1 Absolutstetigkeit in Dimension 1

Zunächst ein einfaches analytisches Kriterium für Absolutstetigkeit.

Lemma 1.1 *Sei $\mu|\mathbf{B}^1$ finit. Es gebe $c \in \mathbf{R}$, so daß für beschränktes $\phi \in C^1(\mathbf{R})$ gilt*

$$|\int \phi'(x)\, \mu(dx)| \leq c\, ||\phi||_\infty.$$

Dann gilt $\mu \ll \lambda$.

Beweis:
Sei $0 \leq f$ stetig mit kompaktem Träger, $\phi(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy$. Dann nach Voraussetzung

$$\int f\, d\mu \leq c \int f\, d\lambda.$$

Diese Ungleichung verallgemeinert man auf beschränkte meßbare f, und wendet den Satz von Radon-Nikodym an. •

Um das Kriterium von Lemma 1.1 auf $\nu_1 \circ f^{-1}$ anzuwenden, benutzt man die Technik der *partiellen Integration* auf Gaußschen Räumen, in diesem Fall einem eindimensionalen.

Wir benutzen die Abkürzung

$$\langle g|h\rangle = \int g\, h\, d\nu_1$$

für $f, g \in L^2(\mathbf{R}, \nu_1)$, und rechnen zunächst rein formal.Wir wollen in

$$\int \phi'(x)\nu_1 \circ f^{-1}(dx) = \int \phi' \circ f\, d\nu_1 = \langle \phi' \circ f|1\rangle = \langle [\phi \circ f]'|\frac{1}{f'}\rangle$$

die Ableitung aufs andere Argument überwälzen. Dazu benutzen wir für genügend glatte g, h die fundamentale Beziehung

$$
\begin{aligned}
&\langle g' | h \rangle \\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g'(x)\, h(x)\, \exp(-\frac{x^2}{2})\, dx \\
&\quad = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(x)\, \frac{d}{dx}[h(x)\, \exp(-\frac{x^2}{2})]\, dx \\
&\quad = -\int g(x)\, \exp(\frac{x^2}{2}) \frac{d}{dx}[\exp(-\frac{x^2}{2}) h(x)]\, \nu_1(dx) \\
&\quad = \langle g | -h' + x\, h \rangle.
\end{aligned}
$$

Definieren wir also dg als distributionelle Ableitung von g und deren Adjungierte

$$\delta h = -h' + x\, h$$

für $g, h \in L^2(\mathbf{R}, \nu_1)$, so macht diese Beziehung noch Sinn, wenn $dg, \delta h \in L^2(\mathbf{R}, \nu_1)$. Wir erhalten

Lemma 1.2 *Seien $g, h \in L^2(\mathbf{R}, \nu_1)$ mit $dg, \delta h \in L^2(\mathbf{R}, \nu_1)$. Dann gilt*

$$\langle dg | h \rangle = \langle g | \delta h \rangle, \quad d\delta - \delta d = id.$$

Insbesondere gilt für $f \in L^2(\mathbf{R}, \nu_1)$ mit $\delta(\frac{1}{df}) \in L^1(\mathbf{R}, \nu_1)$

$$\nu_1 \circ f^{-1} \ll \lambda.$$

Damit ist das Programm auch im Unendlichdimensionalen skizziert. Man braucht *distributionelle Ableitungen* in $L^2(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \nu)$ sowie eine Version des *Divergenz-Operators*, um über die Glattheit von $\nu \circ f^{-1}$ für $f : \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \to \mathbf{R}$ Aussagen machen zu können. Zur bequemeren Definition dieser Operatoren bedienen wir uns nun einer Darstellung von f in Fourier-Reihen bzgl. einer natürlichen ONB.

1.2 Chaosentwicklungen

Für $n \geq 0$ sei $H_n = \delta^n 1$ das *Hermite-Polynom* vom Grad n.

Lemma 1.3 $(\frac{1}{\sqrt{n!}} H_n)_{n \geq 0}$ *ist eine ONB von $L^2(\mathbf{R}, \nu_1)$.*

Beweis:

1. Für $n < k$ gilt

$$\langle H_n | H_k \rangle = \langle d^k\, \delta^n 1 | 1 \rangle = 0.$$

Der Leitterm von H_n ist offenbar 1, und daher für $n = k$

$$\langle H_n | H_n \rangle = \langle d^n\, \delta^n 1 | 1 \rangle = n!.$$

2. Sei $\phi \in L^2(\mathbf{R}, \nu_1)$ mit $\langle \phi | H_k \rangle = 0$ für alle $k \geq 0$. Dann gilt auch $\langle \phi | x^k \rangle = 0$ für $k \geq 0$. Wir zeigen, daß dann $\phi = 0$.

Sei dazu für $z \in \mathbf{C}$
$$F(z) = \int \phi(v)\, e^{iv\,z - \frac{1}{2}v^2} dv.$$
Dann ist wegen
$$\int |v\,\phi(v)|\, e^{-vt-\frac{v^2}{2}} dv \le [\int |\phi(v)|^2\, e^{-\frac{v^2}{2}})dv \int |v|^2\, e^{-2vt-\frac{v^2}{2}} dv]^{\frac{1}{2}} < \infty$$
für $t \in \mathbf{R}$ F eine ganze Funktion, die nach Annahme den Gleichungen
$$F^{(k)}(0) = i^k \int v^k\, \phi(v)\, e^{-\frac{v^2}{2}} dv = \sqrt{2\pi}\, i^k\, \langle \phi | x^k \rangle = 0$$
für $k \ge 0$ genügt. Damit folgt $F = 0$ und wegen der Eindeutigkeit der Fouriertransformierten $\phi = 0$. •

Wie sieht die unendlichdimensionale Version dieser ONB aus?

Für $n \in \mathbf{N}$ sei $E_n = \mathbf{Z}_+^n,\ E = \cup_{n\in\mathbf{N}}\ \pi_n^{-1}(E_n)$. Für $p = (p_1, \cdots, p_k, 0, \cdots) \in E$ sei $|p| = p_1 + \cdots + p_k,\ p! = \prod_{i=1}^k p_i!$. Für $x \in \mathbf{R}^k$ bzw. $x \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, $p \in E_k$ bzw. E sei
$$H_p(x) = \prod_i H_{p_i}(x_i),$$
wobei das Produkt über $1 \le i \le k$ bzw. $i \in \mathbf{N}$ gebildet wird
(k*-dim.* bzw. *verallgemeinerte Hermite-Polynome*).

Lemma 1.4 *$(\frac{1}{\sqrt{p!}}H_p : p \in E_k)$ ist eine ONB von $L^2(\mathbf{R}^k, \mathbf{B}^k, \nu_k)$, $(\frac{1}{\sqrt{p!}}H_p : p \in E)$ eine ONB von $L^2(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \mathbf{B}^{\mathbf{N}}, \nu)$.*

Beweis:
Definiert man wie oben $\langle g|h\rangle = \int gh\, d\nu$ für $g, h \in L^2(\mathbf{R}^{\mathbf{N}})$ und entsprechendes im k-dimensionalen, so hat man nur zu beachten
$$\langle H_p | H_q \rangle = \prod_i \langle H_{p_i} | H_{q_i} \rangle$$
für $p, q \in E$ bzw. E_k, sowie daß $\cup_{n\in\mathbf{N}}\pi_n^{-1}[L^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{B}^n, \nu_n)]$ dicht ist in $L^2(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \mathbf{B}^{\mathbf{N}}, \nu)$. •

Damit können wir nun die Sobolev-Räume des Kalküls definieren.

1.3 Sobolev-Räume

1.3.1 Der endlichdimensionale Fall

Wir beginnen mit dem k-dimensionalen Fall für $k \in \mathbf{N}$. Gemäß Lemma 1.4 können wir für $f \in L^2(\mathbf{R}^k, \nu_k)$ schreiben
$$f = \sum_{p\in E_k} \frac{c_p(f)}{p!} H_p$$

mit Koeffizienten $c_p(f)$, für die gilt $\sum_{p\in E_k} \frac{c_p(f)^2}{p!} < \infty$. Wir schreiben kurz $f \sim (c_p(f))$. Sei $\mathcal{P}^k = \mathrm{span}\{H_p : p \in E_k\}$. Für $1 \le j \le k$ sei

$$d_j f = \frac{\partial}{\partial x_j} f, \quad \delta_j f = -d_j f + x_j\, f, \quad f \in \mathcal{P}^k.$$

Wie kann man diese Operatoren fortsetzen? Wir beschränken uns hier auf die Beschreibung der Definitionsbereiche von d_j und kommen erst später kurz auf die von δ_j zurück, die von eher sekundärer Bedeutung sind.

Sei $p \in E_k$. Wegen

$$\begin{aligned} \delta H_n &= \delta^{n+1} 1 = H_{n+1}, \\ dH_n &= d\,\delta^n 1 = \delta\, d\, \delta^{n-1} 1 + \delta^{n-1} 1 = \delta^2\, d\, \delta^{n-2} 1 + 2\, \delta^{n-1} 1 = \cdots = n\delta^{n-1} 1 = n\, H_{n-1} \end{aligned} \tag{1}$$

für $n \in \mathbf{N}$ gelten die Beziehungen

$$d_j H_p = p_j \prod_{i\neq j} H_{p_i}\, H_{p_j-1}, \quad \delta_j H_p = \prod_{i\neq j} H_{p_i}\, H_{p_j+1}.$$

Daher ist d_j fortsetzbar auf

$$D_j(\mathbf{R}^k) = \{f : f \sim (c_p(f)), \sum_{p\in E_k} p_j\, \frac{c_p(f)^2}{p!} < \infty\},$$

zu

$$d_j f = \sum_{p\in E_k} \frac{c_p(f)}{p!}\, d_j H_p \qquad (H_{-1} = 0),$$

und die quadratischen Sobolev-Räume lassen sich erklären als

$$D_1^2(\mathbf{R}^k) = \cap_{j=1}^k D_j(\mathbf{R}^k) = \{f : f \sim (c_p(f)), \sum_{p\in E_k} |p|\, \frac{c_p(f)^2}{p!} < \infty\}.$$

Darauf ist

$$\nabla f = (d_1 f, \cdots, d_k f)$$

wegen

$$||(\nabla f, \nabla f)^{\frac{1}{2}}||_2^2 = ||[\sum_{j=1}^k |d_j f|^2]^{\frac{1}{2}}||_2^2 = \sum_{p\in E_k} |p| \frac{c_p(f)^2}{p!}$$

definiert. Offenbar ist $D_1^2(\mathbf{R}^k)$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$(f,g)_{2,1} = \langle f|g\rangle + \sum_{j=1}^k \langle d_j f | d_j g\rangle,$$

$f, g \in D_1^2(\mathbf{R}^k)$, und Norm

$$||f||_{2,1} = ||f||_2 + ||(\nabla f, \nabla f)^{\frac{1}{2}}||_2 = ||f||_2 + ||[\sum_{j=1}^k (d_j f)^2]^{\frac{1}{2}}||_2.$$

Nach Definition sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

$$(i) \qquad f \in D_1^2(\mathbf{R}^k),$$
$$(ii) \qquad (\nabla f, \nabla f)^{\frac{1}{2}} = [\sum_{1 \leq j \leq k} |d_j f|^2]^{\frac{1}{2}} \in L^2(\mathbf{R}^k, \mathbf{B}^k, \nu_k).$$

Entsprechend definiert man nun für $1 \leq j_1, \cdots, j_l \leq k$ mehrfache Ableitungen $d_{j_1 \cdots j_l} f$, und damit $\nabla^l f$. Dazu gehören Hilbert-Räume $D_l^2(\mathbf{R}^k)$ mit Normen

$$||f||_{2,l} = ||f||_2 + \sum_{r=1}^{l} ||(\nabla^r f, \nabla^r f)^{\frac{1}{2}}||_2 = ||f||_2 + \sum_{r=1}^{l} ||[\sum_{j_1, \cdots, j_r = 1}^{k} (d_{j_1 \cdots j_r} f)^2]^{\frac{1}{2}}||_2.$$

Offenbar ist $D_l^2(\mathbf{R}^k)$ auch der Abschluß von $\mathcal{P}^k$ bzgl. $||.||_{2,l}$. In diesem Sinne setzt man für $p \geq 2$

$$D_l^p(\mathbf{R}^k) = \overline{\mathcal{P}^k}^{||.||_{p,l}}, \quad \text{mit} \quad ||f||_{p,l} = ||f||_p + \sum_{r=1}^{l} ||(\nabla^r f, \nabla^r f)^{\frac{1}{2}}||_p,$$

und erhält mit klassischen Argumenten die folgende Verallgemeinerung obiger Charakterisierung differenzierbarer Funktionen.

Theorem 1.1 *Für $p \geq 2$ sei $f \in L^p(\mathbf{R}^k, \mathbf{B}^k, \nu_k)$. Dann sind äquivalent:*

$$(i) \qquad f \in D_1^p(\mathbf{R}^k),$$
$$(ii) \qquad (\nabla f, \nabla f)^{\frac{1}{2}} \in L^p(\mathbf{R}^k, \mathbf{B}^k, \nu_k).$$

$D_l^p(\mathbf{R}^k)$ ist ein Banachraum bzgl. $||.||_{p,l}$.

Beispiel 2: Nach (1) gilt $f \sim (c_p(f)) \in D_2^p(\mathbf{R}^k)$ genau dann, wenn für $g \sim (|p|\, c_p(f))$ gilt $g \in L^p(\mathbf{R}^k)$.

1.3.2 Der unendlichdimensionale Fall

Um im Unendlichdimensionalen entsprechende Sobolev-Räume zu erklären, bedient man sich des folgenden Tricks.

Lemma 1.5 *Sei $\mathbf{B}_n = \pi_n^{-1}[\mathbf{B}^n], n \in \mathbf{N}$, $p \geq 2$. Für $f \in L^p(\mathbf{R}^{\mathbf{N}})$ ist dann $(E(f|\mathbf{B}_n))_{n \in \mathbf{N}}$ ein Martingal, das f.s. und in L^p gegen f konvergiert.*

Beweis:
Es gilt $\mathbf{B}^{\mathbf{N}} = \sigma(\cup_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{B}_n)$. Man verwendet den Eindeutigkeitssatz für Maße. •

Wie sieht $E(f|\mathbf{B}_n)$ für $f \in L^p$ aus? Die Darstellung (Lemma 1.4) $f = \sum_{p \in E} \frac{c_p(f)}{p!} H_p$ kürzen wir wieder mit $f \sim (c_p(f))$ ab. Nach Lemma 1.2 gilt dann

$$E(f|\mathbf{B}_n) = \sum_{p \in \pi_n^{-1}(E_n)} \frac{c_p(f)}{p!} H_p,$$

also mit $f_n = \sum_{p \in E_n} \frac{c_p(f)}{p!} H_p \in L^p(\mathbf{R}^n)$

$$E(f|\mathbf{B}_n) = f_n \circ \pi_n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Damit können nun die Sobolev-Räume auf einfache Weise mit Hilfe der endlichdimensionalen beschrieben werden.

Sei für $p \geq 2, l \in \mathbf{N}$

$$D_l^p(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}) = \{f \in L^p(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}) : \; f_n \in D_l^p(\mathbf{R}^n), n \in \mathbf{N}, \; \sup_{n \in \mathbf{N}} ||f_n||_{p,l} < \infty\},$$

mit Norm

$$||f||_{p,l} = \lim_{n \to \infty} ||f_n||_{p,l}$$

für $f \in D_l^p(\mathbf{R}^{\mathbf{N}})$.

Daß diese Definition sinnvoll ist, folgt aus

Lemma 1.6 *Sei $f \in D_1^p(\mathbf{R}^{\mathbf{N}})$, $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ das zugehörige Martingal. Dann gilt für $j \in \mathbf{N}$: $((d_j f_n) \circ \pi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ konvergiert in $L^p(\mathbf{R}^{\mathbf{N}})$ gegen $\sum_{p \in E} \frac{c_p(f)}{p!} \frac{\partial}{\partial x_j} H_p$. Entsprechende Aussagen gelten für höhere Ableitungen.*

Beweis:
Nach Definition gilt

$$E((d_j f_{n+1}) \circ \pi_{n+1}|\mathbf{B}_n) = d_j E(f_{n+1} \circ \pi_{n+1}|\mathbf{B}_n) = (d_j f_n) \circ \pi_n.$$

Der Prozeß der Ableitungen ist also ein Martingal, das nach Voraussetzung L^p-beschränkt ist. Wende den Martingalkonvergenzsatz an. Nach Definition von d_j auf $D_1^2(\mathbf{R}^n)$ ist der Grenzwert genau der Gewünschte. •

Das Lemma erlaubt uns, die Operatoren d_j ins Unendlichdimensionale fortzusetzen.

Sei für $f \in D_1^p(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}), \; j \in \mathbf{N}$

$$d_j f = \lim_{n \to \infty} (d_j f_n) \circ \pi_n, \quad \nabla f = (d_j f)_{j \in \mathbf{N}}.$$

Entsprechend definieren wir wieder höhere Ableitungen.

Die differenzierbaren Funktionen lassen sich demzufolge so charakterisieren. Sei $\mathcal{P} = \mathrm{span}\{H_p : p \in E\}$.

Theorem 1.2 *Für $p \geq 2$ sei $f \in L^p(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \mathbf{B}^{\mathbf{N}}, \nu)$. Dann sind äquivalent:*

$$(i) \qquad f \in D_1^p(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}),$$
$$(ii) \qquad (\nabla f, \nabla f)^{\frac{1}{2}} = [\sum_{j \in \mathbf{N}} |d_j f|^2]^{\frac{1}{2}} \in L^p(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \mathbf{B}^{\mathbf{N}}, \nu).$$

$D_1^2(\mathbf{R}^{\mathbf{N}})$ ist ein Hilbert-Raum bzgl. des Skalarprodukts

$$(f,g)_{2,1} = \langle f|g\rangle + \sum_{j=1}^{\infty}\langle d_j f|d_j g\rangle,$$

$f,g \in D_1^2(\mathbf{R}^{\mathbf{N}})$. $D_l^p(\mathbf{R}^{\mathbf{N}})$ ist ein Banachraum bzgl. $||.||_{p,l}$ und ∇ ein abgeschlossener Operator. Es gilt $D_l^p(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}) = \overline{\mathcal{P}}^{||\cdot||_{p,l}}$.

Beweis:
1. Sei $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ das zu f gehörige Martingal. Dann gilt gemäß Theorem 1.1

$$||f_n||_{p,1} = ||f_n||_p + ||[\sum_{j=1}^{n}|d_j f_n|^2]^{\frac{1}{2}}||_p.$$

Also ist nach Jensen's Ungleichung $\sup_{n\in\mathbf{N}}||f_n||_{p,1} < \infty$ äquivalent zur Aussage

$$||f||_p + ||[\sum_{j\in\mathbf{N}}|d_j f|^2]^{\frac{1}{2}}||_p < \infty.$$

2. Sei $(f^m)_{m\in\mathbf{N}}$ Cauchyfolge in $D_1^p(\mathbf{R}^{\mathbf{N}})$, $(f_n^m)_{n,m\in\mathbf{N}}$ die zugehörigen Martingale. Dann gilt für $l,m,n \in \mathbf{N}$ wegen Jensen's Ungleichung

$$||f_n^m - f_n^l||_{p,1} \le ||f^m - f^l||_{p,1}.$$

Wegen der Vollständigkeit von $D_1^p(\mathbf{R}^n)$ existiert $f_n = \lim_{m\to\infty} f_n^m$ in $D_1^p(\mathbf{R}^n)$. $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ist sogar ein L^p-beschränktes Martingal, konvergiert nach dem Martingalsatz also gegen $f \in D_1^p(\mathbf{R}^{\mathbf{N}})$. Die Aussage $||f^m - f||_{p,1} \to 0$ ist eine Konsequenz des Lemmas von Fatou. •

Damit können wir zur Frage nach der Glattheit von Verteilungen zurückkommen.

1.4 Absolutstetigkeit in Dimension ∞

Zunächst brauchen wir wieder ein analytisches Kriterium.

Lemma 1.7 *Seien $d \in \mathbf{N}$ und $\mu|\mathbf{B}^d$ finit. Es existiere $c \in \mathbf{R}$, so daß für alle $\phi \in C^1(\mathbf{R}^d)$ mit beschränkten partiellen Ableitungen, $1 \le j \le d$, gilt*

$$|\int \frac{\partial}{\partial x_j}\phi(x)\,\mu(dx)| \le c\,||\phi||_\infty.$$

Dann gilt $\mu \ll \lambda$.

Beweis:
Wir argumentieren für $d = 2$.

1. Für $\phi \in C^1(\mathbf{R}^d)$ mit kompaktem Träger gilt

$$
\begin{aligned}
[\int |\phi|^2 d\lambda]^{\frac{1}{2}} \quad &\leq \quad [\int \sup_{x_2 \in \mathbf{R}} |\phi(x_1,x_2)|\, dx_1 \; \int \sup_{x_1 \in \mathbf{R}} |\phi(x_1,x_2)| dx_2]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq [\int |\frac{\partial \phi}{\partial x_2}| dx_1\, dx_2 \; \int |\frac{\partial \phi}{\partial x_1}| dx_1\, dx_2]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{2}[\int |\frac{\partial \phi}{\partial x_2}| d\lambda + \int |\frac{\partial \phi}{\partial x_1}| d\lambda].
\end{aligned}
$$

2. Sei nun $0 \leq u$ stetig mit kompaktem Träger, $\int u\, d\lambda = 1$, und $u_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^2} u(\frac{1}{\epsilon} \cdot)$. Wir glätten μ durch

$$
\psi_\epsilon = \int u_\epsilon(\cdot - y)\mu(dy), \quad \epsilon > 0.
$$

Man sieht leicht, daß $\psi_\epsilon \cdot \lambda \to \mu$ schwach mit $\epsilon \to 0$. Wir müssen zeigen, daß die Abbildung

$$
g \mapsto \int g d\mu
$$

ein stetiges lineares Funktional auf $L^2(\mathbf{R}^2)$ definiert, auf das wir dann den Satz von Riesz anwenden können. Für $\epsilon > 0$ und ϕ wie in 1. ist aber nach Voraussetzung

$$
|\int \frac{\partial \psi_\epsilon}{\partial x_i} \phi d\lambda| = |\int \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \psi_\epsilon\, d\lambda| \leq c\, ||\phi||_\infty
$$

und damit

$$
\int |\frac{\partial \psi_\epsilon}{\partial x_i}| d\lambda \leq c.
$$

Daraus folgt für $\epsilon > 0$ und $g \in L^2(\mathbf{R}^2)$

$$
\begin{aligned}
&|\int \psi_\epsilon\, g d\lambda| \\
&\quad \leq [\int |\psi_\epsilon|^2 d\lambda \; \int |g|^2 d\lambda]^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \leq \frac{1}{2}[\int |\frac{\partial \psi_\epsilon}{\partial x_1}| d\lambda + \int |\frac{\partial \psi_\epsilon}{\partial x_2}| d\lambda]\; (\int |g|^2 d\lambda)^{\frac{1}{2}} \qquad (1.) \\
&\quad \leq c(\int |g|^2 d\lambda)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

•

Sei nun $f = (f^1, \cdots, f^d) \in L^2(\mathbf{R}^\mathbf{N}, \mathbf{B}^\mathbf{N}, \nu)^d$. Mit der Idee der partiellen Integration auf diesem Raum wollen wir das Kriterium von Lemma 1.7 für das Maß $\nu \circ f^{-1}$ verifizieren. Für $\phi \in C^1(\mathbf{R}^d)$ beschränkt müssen wir also in

$$
\int \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d\nu \circ f^{-1} = \int \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(f) d\nu
$$

partiell integrieren. Dazu brauchen wir offenbar Glattheit von $\phi \circ f$. Es gilt die folgende Kettenregel.

Lemma 1.8 *Sei $p \geq 2, f \in D_1^p(\mathbf{R}^{\mathbf{N}})^d, \phi \in C^1(\mathbf{R}^d)$ mit beschränkten partiellen Ableitungen. Dann gilt $\phi \circ f \in D_1^p(\mathbf{R}^{\mathbf{N}})$ und*

$$\nabla[\phi \circ f] = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(f)\, \nabla f^i.$$

Beweis:
Sei $(f^n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine Folge mit $f^n \in \mathcal{P}^d$ und $||f^{n,i} - f^i||_{p,1} \to 0$ mit $n \to \infty$, $1 \leq i \leq d$. Eine solche existiert nach Lemma 1.4 und Lemma 1.5. Wegen der Beschränktheit der partiellen Ableitungen von ϕ gilt dann nach Theorem 1.2

$$\nabla[\phi \circ f^n] = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(f^n)\, \nabla f^{n,i} \to \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(f)\, \nabla f^i$$

in $L^p(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \mathbf{B}^{\mathbf{N}}, \nu)$. Eine erneute Anwendung von Theorem 1.2 liefert die Behauptung.
•

Lemma 1.8 macht folgende formale Rechnung möglich. Zunachst multiplizieren wir die Formel von Lemma 1.8 skalar mit ∇f^k, um mit der Bezeichnung

$$\sigma_{ik} = (\nabla f^i, \nabla f^k), \quad 1 \leq i, k \leq d$$

sukzessive zu erhalten

$$\begin{aligned}
(\nabla[\phi \circ f], \nabla f^k) = \sum_{j=1}^{\infty} d_j[\phi \circ f]\, d_j f^k &= \sum_{1\leq i\leq d} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(f)\, \sigma_{ik}, \\
\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(f) &= \sum_{k=1}^{d} \sum_{j=1}^{\infty} d_j[\phi \circ f]\, d_j f^k \quad \sigma_{ki}^{-1}, \\
\int \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(f)\, d\nu &= \int \phi \circ f \sum_{k=1}^{d} \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j[d_j f^k \ \sigma_{ki}^{-1}]\, d\nu.
\end{aligned}$$

Wir müssen noch verifizieren, daß die einzelnen Schritte in der obigen formalen partiellen Integration gerechtfertigt sind.

Offenbar existiert die *Malliavin-Matrix* oder *Kovarianzmatrix* σ ν-f.ü., falls $f \in D_1^2(\mathbf{R}^{\mathbf{N}})^d$. Daß unter diesen Voraussetzungen die Summe auf der rechten Seite der 2. Gleichung wohldefiniert ist, folgt aus Theorem 1.2, Lemma 1.8 und der Ungleichung von Hölder. Entscheidend ist der Nachweis, daß auch $\sum_{j=1}^{\infty} \delta_j[d_j f^k \ \sigma_{ki}^{-1}]$ sinnvoll ist.

Lemma 1.9 *Sei $f \in D_2^4(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}),\ g \in D_1^4(\mathbf{R}^{\mathbf{N}})$. Dann gilt*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \delta_j[d_j f \ g] \in L^2(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}).$$

Beweis:
Für $f, g \in \mathcal{P}^n$ gilt nach Definition der Operatoren

$$\delta_j[d_j f\, g] = \delta_j d_j f \;\, g - d_j f\, d_j g$$

und für $p \in E_n$ wegen (1)

$$\delta_j d_j H_p = p_j\, H_p,$$

$1 \leq j \leq n$. Damit folgt für $f \sim (c_p(f))$, $q \geq 1$ nach Beispiel 2

$$\sum_{j=1}^n \delta_j d_j f \sim (|p| c_p(f)), \text{ also } ||\sum_{j=1}^n \delta_j d_j f||_q \leq ||f||_{q,2}.$$

Folglich gilt

$$||\sum_{j=1}^n \delta_j[d_j f\, g]||_2 \leq ||f||_{4,2}\, ||g||_4 + ||f||_{4,1}\, ||g||_{4,1}.$$

Nun approximiert man, zunächst im n-dimensionalen, und dann unter Verwendung von Theorem 1.2 im Unendlichdimensionalen. •

Damit erhalten wir die Hauptergebnisse dieses Abschnitts.

Theorem 1.3 $f = (f^1, \cdots, f^d) : \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \to \mathbf{R}^d$ *erfülle die Bedingungen*

$$\begin{array}{ll} (i) & f^i \in D_2^4(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}), 1 \leq i \leq d, \\ (ii) & \sigma_{ik}^{-1} \in D_1^4(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}), 1 \leq i, k \leq d. \end{array}$$

Dann gilt $\nu \circ f^{-1} \ll \lambda$.

Die Voraussetzungen von Theorem 1.3 lassen sich aus den folgenden herleiten.

Korollar 1.1 *Hinreichend für die Bedingungen von Theorem 1.3 sind die folgenden:*

$$\begin{array}{ll} (i) & f^i \in D_2^p(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}), 1 \leq i \leq d, p \geq 2, \\ (ii) & \det \sigma^{-1} \in L^p(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}), p \geq 2. \end{array}$$

Dies folgt aus der Hölder'schen Ungleichung und der Cramer'schen Regel.

1.5 Übertragung auf den kanonischen Wienerraum

Der in den vorangehenden Abschnitten entwickelte Kalkül hängt vordergrüdig von der Wahl der den Gaußschen Raum darstellenden Folge ab. Unser Interesse gilt dem kanonischen Wienerraum von Beispiel 1. Wir müssen daher kurz diskutieren, wie sich der stochastische Variationskalkül übersetzt. Wir beschränken uns der Einfachheit halber zunächst auf den eindimensionalen Fall, und machen am Ende ein paar Bemerkungen zur Verallgemeinerung auf Dimension m.

Sei $(g_i)_{i\in\mathbf{N}}$ eine ONB von $L^2(\mathbf{R}_+)$. Der eingangs erwähnte Isomorphismus ist dann gegeben durch die Abbildung

$$T : f \mapsto f((W(g_i)_{i\in\mathbf{N}}).$$

Wie wir sehen werden, ist es vom Standpunkt der meßbaren Strukturen auf $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ aus gesehen oft günstiger, mit folgender Ableitung zu arbeiten. Sei

$$\mathcal{S} = T(\cup_{n\in\mathbf{N}}\ \pi_n^{-1}[C_0^\infty(\mathbf{R}^n)]) = \{f(W(g_1), \cdots, W(g_n)) : f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n),\ n \in \mathbf{N}\},$$

$$\begin{aligned} D : L^2(\Omega) &\rightarrow L^2(\Omega \times \mathbf{R}_+), \\ F = f(W(g_1), \cdots, W(g_n)) &\mapsto \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(W(g_1), \cdots, W(g_n))\, g_j \\ &= \sum_{j=1}^n d_j f(W(g_1), \cdots, W(g_n)) g_j. \end{aligned}$$

Daß diese Definition von der Basis nicht abhängt, geht schon aus den folgenden Gleichungen hervor. Mit dem Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$ auf $L^2(\mathbf{R}_+)$ gilt nämlich

$$\langle DF, g_j \rangle = d_j f(W(g_1), \cdots, W(g_n)),$$

$$\langle DF, DF \rangle = \sum_{j=1}^n |d_j f|^2 (W(g_1), \cdots, W(g_n)),$$

$F \in \mathcal{S}$. Aus der ersten dieser Gleichungen kann man $d_j f$ als Richtungsableitung von F in Richtung g_j interpretieren. Höhere Ableitungen werden auf $\mathcal{S}$ in offensichtlicher Weise festgelegt. Infolge dieser Gleichungen übersetzen sich die Sobolev-Normen und -Räume folgendermassen. Für $p \geq 2, l \in \mathbf{N}$ entspricht $||f||_{p,l}$ der Größe

$$||F||_{p,l} = ||F||_p + \sum_{r=1}^l ||\langle D^r F, D^r F \rangle^{\frac{1}{2}}||_p,$$

$F \in \mathcal{S}$, und damit den Sobolev-Räumen $D_l^p(\mathbf{R}^{\mathbf{N}})$ die Räume

$$\mathcal{D}_l^p = \overline{\mathcal{S}}^{||.||_{p,l}},$$

auf die sich die *Malliavin-Ableitung* D stetig fortsetzt. Die obigen Übersetzungsgleichungen übertragen sich auf die Fortsetzungen, und die beiden Versionen der Sobolev-Räume entsprechen sich vermöge T. Wir können ∇f als Element von $L^p(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}; l^2(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}))$ auffassen (siehe Theorem 1.2). Entsprechend können wir DF als Element von $L^p(\Omega; L^2(\mathbf{R}_+))$ ansehen. Dabei identifizieren wir $L^2(\Omega; L^2(\mathbf{R}_+))$ und $L^2(\Omega \times \mathbf{R}_+)$. In diesem Sinne gilt die Gleichung

$$DF_t = [\sum_{j=1}^\infty d_j f\, g_j(t)]((W(g_i)_{i\in\mathbf{N}}),$$

wenn $T(f) = F \in \mathcal{D}_1^p$. Wir können nun das Glattheitskriterium in der Sprache von D angeben.

Korollar 1.2 *$F = (F^1, \cdots, F^d) : \Omega \to \mathbf{R}^d$ erfülle*

$$\begin{array}{ll} (i) & F^i \in \mathcal{D}_2^p, p \geq 2, 1 \leq i \leq d, \\ (ii) & \det(\langle DF^i, DF^j \rangle)^{-1}_{1 \leq i,j \leq d} \in L^p(\Omega),\ \ p \geq 2. \end{array}$$

Dann ist $\mathbf{P} \circ F^{-1} \ll \lambda$.

Lokalisiert man die Sobolev-Räume, so kann man Glattheits- und Integrabilitätsforderungen in Korollar 1.2 noch abschwächen (vgl. Bouleau, Hirsch [5], Nualart [19]).

Theorem 1.4 *$F = (F^1, \cdots, F^d) : \Omega \to \mathbf{R}^d$ erfülle die Bedingungen*

$$\begin{array}{ll} (i) & F^i \in \mathcal{D}_1^p \quad \textit{für ein} \quad p > 1,\ 1 \leq i \leq d, \\ (ii) & \det(\langle DF^i, DF^j \rangle)_{1 \leq i,j \leq d} > 0 \quad \mathbf{P}\text{-}f.s.. \end{array}$$

Dann gilt $\mathbf{P} \circ F^{-1} \ll \lambda$.

In dieser Form wollen wir das Kriterium später verwenden.

Eigenschaften wie die *lokale Eigenschaft* der Ableitung lassen sich im abstrakt analytischen Rahmen der ersten Abschnitte weniger gut beschreiben. Sie hat mit speziellen Meßbarkeitsstrukturen zu tun.

Für ein Intervall $I \subset \mathbf{R}_+$ sei

$$\mathbf{F}_I = \sigma(W_v - W_u : [u,v] \subset I) \vee \mathcal{N},$$

wenn $\mathcal{N}$ die $\mathbf{P}$-Nullmengen bezeichnet. Wir schreiben auch $\mathbf{F}_t$ statt $\mathbf{F}_{]-\infty,t]}$, und $\mathbf{F}_s^t$ anstelle von $\mathbf{F}_{[s,t]}$.

Theorem 1.5 *Sei $F \in \mathcal{D}_1^p$ für ein $p \geq 2$, und F sei $\mathbf{F}_I$-meßbar für ein Intervall $I \subset \mathbf{R}_+$. Dann gilt*

$$DF = 0 \quad \textit{auf} \quad \Omega \times I^c \quad \mathbf{P} \otimes \lambda - f.ü.$$

.

Beweis:
Sei $(h_i)_{i \in \mathbf{N}}$ eine ONB von $L^2(I)$. Wir können annehmen, daß $h_i = g_{n_i}, i \in \mathbf{N}$, mit einer monoton wachsenden Folge $(n_i)_{i \in \mathbf{N}}$. Nach Annahme existiert ein $\mathbf{B}^{\mathbf{N}} - \mathbf{B}^1-$meßbares h mit der Eigenschaft $h((W(h_i)_{i \in \mathbf{N}}) = F$. Mit der Funktion

$$f((x_n)_{n \in \mathbf{N}}) = h((x_{n_i})_{i \in \mathbf{N}}), \quad (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}},$$

gilt dann $T(f) = F$. Damit folgt $f \in D_1^p(\mathbf{R}^{\mathbf{N}})$, und wie man durch Approximation unter Verwendung von Lemma 1.4. und Lemma 1.6. erkennt, ist $d_j f = 0$ für $j \notin S$. Damit ergibt sich schließlich

$$\langle DF, DF \rangle \ 1_{\Omega \times I^c} = [\sum_{j \notin S} |d_j f|^2]((W(g_i)_{i \in \mathbf{N}}) = 0.$$

•

Wie berechnet sich die Malliavin-Ableitung eines stochastischen Integrals?

Theorem 1.6 *Sei $(u_t)_{t\geq 0}$ ein stochastischer Prozeß mit den Eigenschaften*

$$\begin{array}{rl} (i) & u_t \text{ ist } \mathbf{F}_t-\text{meßbar}, \\ (ii) & t\mapsto u_t \text{ stetig}, \quad \sup\limits_{0\leq s\leq t}|u_s|\in L^2(\Omega), \\ (iii) & u_t\in\mathcal{D}_1^2, \quad (r,s)\mapsto D_r\,u_s \text{ stetig auf } \mathbf{R}_+^2\setminus\{(r,s):r=s\}, \\ & \sup\limits_{0\leq r,s\leq t}|D_r u_s|\in L^2(\Omega), \end{array}$$

$t\geq 0$. Dann gilt für $t\geq 0$

$$D_r[\int_0^t u_s\,dW_s]=\begin{cases} 0, & r>t, \\ u_r+\int_r^t D_r u_s\,dW_s, & r\leq t. \end{cases}$$

Eine analoge Formel gilt für Stratonovich-Integrale.

Beweis:
Sei $t\geq 0$ fest. Für $n\in\mathbf{N}, 0\leq k\leq n$, sei $t_k^n=\frac{k}{n}t$,

$$u^n=\sum_{k=0}^{n-1}u_{t_k^n}\;1_{]t_k^n,t_{k+1}^n]}.$$

Nach Theorem 1.5 und Lemma 1.8 gilt

$$\begin{aligned} D_r[\int_0^t u_s^n\,dW_s] &= \sum_{k=0}^{n-1}[u_{t_k^n}\,1_{[t_k^n,t_{k+1}^n]}(r)+1_{]r,t]}(t_k^n)\cdot D_r u_{t_k^n}\,(W_{t_{k+1}^n}-W_{t_k^n})] \\ &= u_r^n+\sum_{k=0}^{n-1}1_{]t_k^n,t_{k+1}^n]}(r)\int_{t_k^n}^t D_r u_s^n\,dW_s \\ &\to \begin{cases} 0, & r>t, \\ u_r+\int_r^t D_r u_s\,dW_s, & r\leq t, \end{cases} \end{aligned}$$

mit punktweiser Konvergenz. Bezeichnen wir den Limes mit g, so ergibt sich weiter aus den Voraussetzungen mit majorisierter Konvergenz

$$\begin{aligned} &\langle D[\int_0^t u_s^n\,dW_s]-g, D[\int_0^t u_s^n\,dW_s]-g\rangle \\ &\leq c\;[\int_0^t(u^n-u)_r^2dr+\int_0^t\sum_{k=0}^{n-1}1_{]t_k^n,t_{k+1}^n]}(r)[\int_{t_k^n}^t D_r u_s^n\,dW_s-\int_r^t D_r u_s\,dW_s]^2\;dr] \\ &\to 0 \end{aligned}$$

mit $n\to\infty$ in $L^2(\Omega)$. Damit folgt die Behauptung. •

Die Formel von Theorem 1.5 gilt unter allgemeineren Voraussetzungen (siehe Nualart [19]).

Die obigen Überlegungen lassen sich ohne Mühe auf m-dimensionale kanonische Wienerräume verallgemeinern. D wird dann ersetzt durch D^j, die Ableitung bzgl. W^j, $1\leq j\leq m$, und $\langle DF,DF\rangle$ durch $\sum_{j=1}^m\langle DF^j,DF^j\rangle, F\in\mathcal{D}_1^p$.

Die weitere Verallgemeinerung auf einen *zweiseitigen* Wienerprozeß, d.h. $\Omega = C(\mathbf{R};\mathbf{R}^m)$, mit den Borelmengen $\mathbf{F}$ bzgl. gleichmäßiger Konvergenz auf Kompakta, und einem Maß P, für das $(W_t)_{t\geq 0}$ und $(W_{-t})_{t\geq 0}$ unabhängige, in 0 startende Brownsche Bewegungen sind, wobei $W_t : \Omega \to \mathbf{R}^m$, $\omega \mapsto \omega(t)$, $t \in \mathbf{R}$, ist ebenfalls Routine.

2 Stochastische Flüsse und der multiplikative Ergodensatz

Das asymptotische Verhalten deterministischer dynamischer Systeme wird bestimmt von den spektralen Daten der Matrix, die in der Linearisierung der zugehörigen DGL auftritt. Wie verhält es sich mit zufälligen dynamischen Systemen, die von stochastischen DGL erzeugt werden? Der *multiplikative Ergodensatz* von Oseledets liefert für die Linearisierung der stochastischen DGL einen Ersatz für die spektralen Daten deterministischer Matrizen. Zufällige lineare Teilräume des Zustandsraums, die wir *Oseledets-Räume* nennen, spielen die Rolle der Eigenräume, die sogenannten *Lyapunov-Exponenten* die Rolle der Eigenwerte. Für den Fall, daß die stochastische DGL von Wienerprozessen gesteuert wird, wollen wir im 3. Abschnitt Verteilungseigenschaften der Oseledets-Räume mit Hilfe des in Abschnitt 1 entwickelten Variationskalküls studieren.

In diesem Abschnitt skizzieren wir, wie man einer stochastischen DGL mit regulären Koeffizienten einen *Fluß* zuordnen kann, der zu einem *Kozykel* perfektioniert wird. Diese Objekte bilden den Gegenstand der multiplikativen Ergodentheorie. Der Satz von Oseledets soll am Ende formuliert werden.

Sei $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ ein m-dimensionaler, zweiseitiger kanonischer Wienerraum. Für "Vektorfelder" $\hat{f}_0, f_1, \cdots, f_m \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$ mit beschränkten partiellen Ableitungen betrachten wir die stochastische DGL im Stratonovich-Sinn

$$\begin{aligned} d\phi_t(x) &= \sum_{j=1}^m f_j(\phi_t(x)) \circ dW_t^j + \hat{f}_0(\phi_t(x))dt, \qquad (2) \\ \phi_0(x) &= x, \end{aligned}$$

$x \in \mathbf{R}^d$. In der Itô'schen Version dieser Gleichung taucht ein anderer Driftterm auf, der gegeben ist durch $f_0 = \hat{f}_0 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^d D_i f_j f_j^i$. Damit in dieser Version globale Lipschitz-Bedingungen erfüllt sind, nehmen wir zusätzlich an, daß f_0 beschränkte partielle Ableitungen hat. Wir skizzieren zunächst den Kunita'schen ([14]) Beweis der Aussage, daß die Familie der Lösungsprozesse von (2) einen Fluß von Homöomorphismen des $\mathbf{R}^d$ erzeugt. Für diese Zwecke beschränken wir uns auf $\mathbf{R}_+$ als Parameterbereich.

2.1 Die Homöomorphismeneigenschaft

Sei $\phi_t(x), t \geq 0, x \in \mathbf{R}^d$, die Familie der Lösungen von (2). Um ϕ_t, aufgefaßt als Abbildung des $\mathbf{R}^d$, als Homöomorphismus ($\mathbf{P}$-f.s. für alle $t \geq 0$) zu erkennen, müssen wir nur zwei Eigenschaften genauer studieren:

(a) die Injektivität von $\phi_t, t \geq 0$, $\mathbf{P}$-f.s.,
(b) $\lim_{|x|\to\infty} |\phi_t(x)| = \infty, t \geq 0$, $\mathbf{P}$-f.s..

Erfüllt nämlich eine Abbildung des $\mathbf{R}^d$ (a) und (b), so kann man mit einem rein analytischen Argument sehen, daß es sich um einen Homöomorphismus handelt: mit (b) kann die Abbildung stetig auf die Alexandroff-Kompaktifizierung des $\mathbf{R}^d$ fortgesetzt werden.

In den folgenden Aussagen ist der Zeithorizont der Einfachheit halber als "1" gewählt. Er kann durch "T" für beliebiges $T \geq 0$ ersetzt werden.

Lemma 2.1 *Zu $p \in \mathbf{R}$ existiert $c_p > 0$, so daß für $x, y \in \mathbf{R}^d$ gilt*

$$E(\sup_{0\leq t\leq 1} |\phi_t(x) - \phi_t(y)|^p) \leq c_p\, |x-y|^p.$$

Beweis:
Sei $p \geq 2, \epsilon > 0$. Für $h_\epsilon(z) = [\epsilon^2 + |z|^2]^{-\frac{1}{2}}, z \in \mathbf{R}^d$, und feste $x, y \in \mathbf{R}^d$ betrachten wir

$$\psi_t^\epsilon = h_\epsilon(\phi_t(x) - \phi_t(y)), \quad t \geq 0.$$

Dann ist ψ^ϵ ein stetiges Semimartingal mit einer Zerlegung $\psi^\epsilon = h_\epsilon(x-y) + M^\epsilon + A^\epsilon$. Wegen der Ungleichungen

$$|Dh_\epsilon(x)| \leq c\, h_\epsilon(x) \cdot \frac{1}{|x|}, \quad |D^2 h_\epsilon(x)| \leq c\, h_\epsilon(x)\, \frac{1}{|x|^2}$$

liefern Itô-Formel und Lipschitz-Bedingungen für $t \geq 0$ die Abschätzungen

$$\langle M^\epsilon\rangle_t \leq \int_0^t (\psi_s^\epsilon)^2\, ds, \quad |A_t^\epsilon| \leq \int_0^t \psi_s^\epsilon ds.$$

Also gilt für $g(t) = E(\sup_{0\leq s\leq t} |\psi_s^\epsilon|^p), t \geq 0$, die Ungleichung

$$g(1) \leq c_p\, [h_\epsilon(x-y)^p + \int_0^1 g(s)\, ds].$$

Darauf wenden wir Gronwall's Lemma an, und lassen schließlich $\epsilon \to 0$ gehen. Damit ergibt sich die Behauptung für $p \leq -2$. Für $p \geq 2$ gelten ähnliche Argumente mit der Funktion $h_\epsilon(z) = [\epsilon^2 + |z|^2]^{\frac{1}{2}}, z \in \mathbf{R}^d$. Die Fälle $-2 < p < 2$ spielt man mit der Hölder'schen Ungleichung auf die bereits behandelten zurück. •

Um die Injektivität der Abbildungen ϕ_t zu erhalten, müssen wir Lemma 2.1 verschärfen.

Lemma 2.2 *Für $t \geq 0, x, y \in \mathbf{R}^d$ sei $\eta_t(x,y) = |\phi_t(x) - \phi_t(y)|^{-1}$. Zu $p > 0$ existiert dann $c_p > 0$, so daß für $x, y, x', y' \in \mathbf{R}^d$ gilt*

$$E(\sup_{0\leq t\leq 1} |\eta_t(x,y) - \eta_t(x',y')|^p) \leq c_p\, |x-y|^{-p}\, |x'-y'|^{-p}\, |(x,y) - (x',y')|^p.$$

Beweis:
Für $t \geq 0, x, y, x', y' \in \mathbf{R}^d$ gilt

$$|\eta_t(x,y) - \eta_t(x',y')| \leq \eta_t(x,y)\,\eta_t(x',y')\,[|\phi_t(x) - \phi_t(x')| + |\phi_t(y) - \phi_t(y')|].$$

Wende Hölder's Ungleichung und Lemma 2.1 mit $3p, -3p$ an. •

Mit Hilfe des *Stetigkeitslemmas von Kolmogorov* für stochastische Prozesse liefert Lemma 2.2 eine stetige Version von η in (t, x, y) zunächst auf den Mengen $\{(t, x, y) : |x - y| \geq \delta, 0 \leq t \leq 1\}, \delta > 0$, und damit auch auf $\{(t, x, y) : x \neq y, 0 \leq t \leq 1\}$. Damit folgt die Injektivität von $\phi_t, t \geq 0$, $\mathbf{P}$-f.s..

Nun zum Verhalten der Abbildungen bei ∞.

Lemma 2.3 *Für $p \in \mathbf{R}$ existiert $c_p > 0$, so daß für $x \in \mathbf{R}^d$ gilt*

$$E(\sup_{0 \leq t \leq 1} (1 + |\phi_t(x)|)^p) \leq c_p\,(1 + |x|)^p.$$

Beweis:
Vgl. Lemma 2.1. •

Um das Verhalten von $|\phi_t(x)|$ bei $|x| \to \infty$ zu studieren, untersucht man das Verhalten von $|\phi_t(x)|^{-1}$ bei $\frac{x}{|x|^2} \to 0$.

Lemma 2.4 *Für $t \geq 0, 0 \neq x \in \mathbf{R}^d$ sei $\eta_t(x) = \frac{1}{1+|\phi_t(\frac{x}{|x|^2})|}$, $\quad \eta_t(0) = 0$. Zu $p > 0$ existiert dann $c_p > 0$, so daß für $x, y \in \mathbf{R}^d$ gilt*

$$E(\sup_{0 \leq t \leq 1} |\eta_t(x) - \eta_t(y)|^p) \leq c_p\,|x - y|^p.$$

Beweis:
Für $t \geq 0, x, y \neq 0$ gilt

$$|\ \eta_t(x) - \eta_t(y)\ | \leq \frac{1}{1 + |\ \phi_t(\frac{x}{|x|^2})\ |}\ \frac{1}{1 + |\ \phi_t(\frac{y}{|y|^2})\ |} \cdot |\ \phi_t(\frac{x}{|x|^2}) - \phi_t(\frac{y}{|y|^2})\ |\ .$$

Um die Momente der rechten Seite dieser Ungleichung abzuschätzen, verwendet man Hölder's Ungleichung, Lemma 2.1 und Lemma 2.3. Schliesslich beachtet man die für $|x| < |y|$ gültige Ungleichung

$$\begin{aligned}
&|\frac{x}{|x|^2} - \frac{y}{|y|^2}| \\
&\quad \leq \frac{|x-y|}{|y|^2} + |x|\,|\frac{1}{|x|^2} - \frac{1}{|y|^2}| \leq \frac{|x-y|}{|y|^2} + \frac{2|x|\,|y|\,|x-y|}{|x|^2\,|y|^2} \\
&\quad \leq 3\frac{|x-y|}{|x||y|}.
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung für $x, y \neq 0$. Für $x = 0$ oder $y = 0$ verwendet man Lemma 2.3. •

Das Stetigkeitskriterium von Kolmogorov läßt sich nun auf η in Lemma 2.4 anwenden und liefert $\lim_{|x| \to \infty} |\phi_t(x)| = \infty$ gleichmäßig auf kompakten Zeitintervallen, $\mathbf{P}$-f.s.. Damit ist die Homöomorphismen-Eigenschaft bewiesen.

2.2 Die Diffeomorphismen-Eigenschaft

In der Situation des vorangehenden Abschnitts gehen wir nun noch einen Schritt weiter. Wir assoziieren der untersuchten stochastischen DGL ihre Linearisierung und deren Inverse. Genauer betrachten wir die beiden matrixwertigen stochastischen DGL

$$\begin{aligned} dv_t(x) &= \sum_{j=1}^m Df_j(\phi_t(x))\, v_t(x) \circ dW_t^j + D\hat{f}_0(\phi_t(x))\, v_t(x)\, dt, \\ v_0(x) &= I, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} dw_t(x) &= -\sum_{j=1}^m w_t(x)\, Df_j(\phi_t(x)) \circ dW_t^j - w_t(x)\, D\hat{f}_0(\phi_t(x))\, dt, \\ w_0(x) &= I, \end{aligned} \tag{4}$$

wobei I die $d \times d$-Einheitsmatrix sei. Für v, w gelten keine globalen Lipschitz-Bedingungen. Die Argumente des Beweises des folgenden Lemmas enthalten die für die Existenz starker Lösungen von (3) und (4) notwendigen.

Lemma 2.5 *Für $p > 0$ existiert $c_p > 0$, so daß für $x, y \in \mathbf{R}^d$ gilt*

$$E(\sup_{0\le t\le 1} |v_t(x) - v_t(y)|^p) \le c_p\, |x-y|^p \wedge 1.$$

Entsprechendes gilt für w.

Beweis:
Schreibt man die Itô'sche Form der Integralgleichung für $v_t(x) - v_t(y)$ aus, so erhält man m Martingalterme und einen von beschränkter Variation. Wir geben Argumente für die Abschätzung eines Martingalterms. Zunächst gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned} &|\int_0^t [Df_j(\phi_s(x))\, v_s(x) - Df_j(\phi_s(y))\, v_s(y)]\, dW_s^j| \\ &\quad \le |\int_0^t [Df_j(\phi_s(x)) - Df_j(\phi_s(y))]\, v_s(x)\, dW_s^j| \\ &\quad + |\int_0^t Df_j(\phi_s(y))\, [v_s(x) - v_s(y)]\, dW_s^j|, \end{aligned}$$

auf deren rechter Seite Terme vom Typ (I) und vom Typ (II) auftreten. Das $p$te Moment eines Terms vom Typ (I) wird zunächst mit Burkholder's Ungleichung abgeschätzt, der Integrand dann mit

$$|[Df_j(\phi_s(x)) - Df_j(\phi_s(y))]\, v_s(x)| \le c\, |\phi_s(x) - \phi_s(y)|\, |v_s(x)|.$$

Dann liefert Hölder's Ungleichung die Majorante

$$||\sup_{0\le t\le 1} |\phi_t(x) - \phi_t(y)|||_{2p}^{\frac{1}{2}} ||\sup_{0\le t\le 1} |v_t(x)|||_{2p}^{\frac{1}{2}},$$

deren ersten Faktor wir mit Lemma 2.1 behandeln. Für den zweiten liefert das übliche Argument mit $f(t) = E(\sup_{0\le s\le t} |v_s(x)|^{2p}), t \ge 0$, die Ungleichung

$$f(1) \le c_p[1 + \int_0^1 f(s)ds],$$

was nach Gronwall's Lemma auf $f(1) \le c_p$ führt. $p$te Momente der Terme vom Typ (I) sind also beschränkt durch $c_p\,|x-y|^p \wedge 1$.

Zur Abschätzung von Termen des Typs (II) verwenden wir Burkholder's Ungleichung, sowie für die Integranden

$$|Df_j(\phi_s(y))\,[v_s(x) - v_s(y)]| \le c\,|v_s(x) - v_s(y)|.$$

Setzen wir dann $g(t) = E(\sup_{0\le s\le t} |v_s(x) - v_s(y)|^p), t \ge 0$, so kommen wir insgesamt auf die Ungleichung

$$g(1) \le c_p\,|x-y|^p \wedge 1 + \int_0^1 g(s)\,ds,$$

die wir wieder mit Gronwall's Lemma behandeln. •

Lemma 2.5 und Kolmogorov's Stetigkeitskriterium verbinden sich wieder, um in (t,x) stetige Versionen der Lösungen von (3) und (4) zu liefern. Die Formel für die Ableitung der Inversen einer Matrix führt sofort auf die Gleichung $v_t^{-1}(x) = w_t(x), t \ge 0, x \in \mathbf{R}^d$. Ähnliche Momentenabschätzungen wie zuvor ergeben schließlich

$$D\phi_t(x) = v_t(x), \quad D\phi_t^{-1}(x) = w_t(x), \quad t \ge 0, x \in \mathbf{R}^d.$$

Damit folgt die Diffeomorphismen-Eigenschaft von $\phi_t, t \ge 0$, $\mathbf{P}$-f.s.. Analoga von Lemma 2.5 gelten auch für höhere partielle Ableitungen, so daß man schließen kann: ϕ_t ist C^∞-Diffeomorphismus für $t \ge 0$, $\mathbf{P}$-f.s.

2.3 Kozykel von Diffeomorphismen

Der zeitliche Ursprung 0 war in (2) willkürlich gewählt. Wir hätten für beliebiges $s \ge 0$ auch die stochastischen DGL

$$\begin{aligned} d\phi_{s,t}(x) &= \sum_{j=1}^m f_j(\phi_{s,t}(x)) \circ dW_t^j + \hat{f}_0(\phi_{s,t}(x))\,dt, \qquad (5)\\ \phi_{s,s}(x) &= x, \end{aligned}$$

$x \in \mathbf{R}^d$, betrachten können, zusammen mit entsprechenden Linearisierungen. Mit dem kanonischen *shift* auf dem Wienerraum

$$\theta_t : \Omega \to \Omega, \quad \omega \mapsto [u \mapsto \omega(t+u) - \omega(t)],$$

$t \in \mathbf{R}$, gilt offenbar $\phi_{s,t}(\theta_s) = \phi_{t-s}$ für $0 \le s \le t$. Allgemeiner liefert die Markov-Eigenschaft der Lösungsprozesse die Gleichung

$$\phi_t = \phi_{t-s}(\theta_s) \circ \phi_s, \quad 0 \le s \le t,$$

$\mathbf{P}$-f.s.. Dabei kann die Nullmenge, auf der die Gleichung nicht gilt, natürlich von (s,t) abhängen. Die *Perfektionierungstechnik* von Arnold, Scheutzow [3] ergibt glücklicherweise, daß die Nullmenge universell gewählt werden kann. Man erhält damit zu (2) einen *Kozykel* von Diffeomorphismen, und entsprechend zu (3) und (4) Kozykel von linearen Isomorphismen des $\mathbf{R}^d$ (siehe auch Arnold [1]).

Schließlich kann man auch $\mathbf{R}_-$ in die obigen Überlegungen einbeziehen. Das erfordert keine wesentlichen Änderungen, hat, wie wir sehen werden, aber Vorteile für die Zwecke der Ergodentheorie.

Theorem 2.1 *Es gibt Versionen $(\phi_t)_{t\in\mathbf{R}}$ und $(v_t)_{t\in\mathbf{R}}$ der Lösungen der stochastischen DGL (2) und (3) mit den Eigenschaften*

$$\begin{array}{rl}
(i) & \phi_t \text{ ist } C^\infty - \text{Diffeomorphismus von } \mathbf{R}^d \text{ für } t\in\mathbf{R};\\
(ii) & \phi_t(\theta_s)\circ\phi_s = \phi_{t+s}, \quad \phi_0 = id_{\mathbf{R}^d}, \quad s,t\in\mathbf{R};\\
 & \text{(Kozykel von Diffeomorphismen)}\\
(iii) & v_t \in Gl(d;\mathbf{R}) \text{ für } t\in\mathbf{R};\\
(iv) & v_t(\theta_s,\phi_s)\circ v_s = v_{t+s}, \quad v_0 = I, \quad s,t\in\mathbf{R}.\\
 & \text{(Linearer Kozykel über dem Schiefprodukt)}
\end{array}$$

Die Linearisierung v enthält Information, die für das asymptotische Verhalten von ϕ sehr wichtig ist, z.B. beim Studium von *Bifurkationen* oder *Rotationszahlen*, d.h. Größen, die das asymptotische Rotationsverhalten des Systems ähnlich beschreiben wie Lyapunov-Exponenten das asymptotische exponentielle Wachstum. Im deterministischen Gegenstück der Linearisierung steckt diese Information in den spektralen Daten einer Matrix. Wir skizzieren nun die wesentlichen Aussagen der stochastischen Version dieser "Spektraltheorie".

2.4 Der multiplikative Ergodensatz

Da der Beweis zu komplex ist, motivieren wir lediglich die Aussagen durch ein Analogieargument zum wohlbekannten deterministischen Fall.

2.4.1 Der deterministische Fall

Sei $A\in\mathbf{R}^{d\times d}$, symmetrisch, mit einfachem Spektrum, Eigenwerten $\lambda_1>\cdots>\lambda_d$, und zugehörigen Eigenräumen $E_1,\cdots,E_d$. Wir betrachten die lineare DGL

$$dv_t = A\,v_t\,dt, \quad v_0 = I. \tag{6}$$

Die Lösung von (6) ist gegeben durch $v_t=\exp(At), t\in\mathbf{R}$. Kann man die Eigenräume dynamisch, d.h. durch das asymptotische Verhalten von durch (6) bestimmten Trajektorien, charakterisieren?

Zur Beantwortung dieser Frage sei Q_i der orthogonale Projektor auf $E_i, 1\le i\le d$. Wir haben die spektralen Zerlegungen

$$v_t = \sum_{i=1}^d e^{\lambda_i t}Q_i, \quad \lim_{t\to\pm\infty}[v_t^*\,v_t]^{\frac{1}{2|t|}} = \sum_{i=1}^d e^{\pm\lambda_i}Q_i.$$

Damit ergibt sich das einfache Resultat

Theorem 2.2 *Sei*

$$
\begin{aligned}
V_i^+ &= E_i \otimes \cdots \otimes E_d, \quad 1 \le i \le d+1, \\
V_i^- &= E_1 \otimes \cdots \otimes E_i, \quad 0 \le i \le d.
\end{aligned}
$$

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\lambda_i &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln ||v_t\, x|| \Leftrightarrow x \in V_i^+ \setminus V_{i+1}^+, \\
\lambda_i &= \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{t} \ln ||v_t\, x|| \Leftrightarrow x \in V_i^- \setminus V_{i-1}^-, \\
\lambda_i &= \lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{t} \ln ||v_t\, x|| \Leftrightarrow x \in V_i^+ \cap V_i^- = E_i,
\end{aligned}
$$

$1 \le i \le d$.

Damit ist E_i als derjenige Unterraum von $\mathbf{R}^d$ charakterisiert, der für darin startende Lösungstrajektorien λ_i als asymptotische exponentielle Wachstumsrate liefert.

Ähnlich hängen Lyapunov-Exponenten und Oseledets-Räume zusammen.

2.4.2 Der stochastische Fall

Wir betrachten von nun ab für den Rest des Kurses die folgende Vereinfachung der Linearisierung (3)

$$
\begin{aligned}
dv_t &= \sum_{j=1}^m A_j\, v_t \circ dW_t^j + A_0\, v_t dt, \\
v_0 &= I.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Lyapunov-Exponenten und Oseledets-Räume erweisen sich als Analoga von Eigenwerten und -räumen durch ihre folgende dynamische Charakterisierung.

Theorem 2.3 *(i) Es gibt $1 \le r \le d, d_1, \cdots, d_r \in \mathbf{N}$ mit $d_1 + \cdots d_r = d$, es gibt $\lambda_1 > \cdots > \lambda_r$, zufällige lineare Teilräume $U_1^\pm, \cdots, U_r^\pm$ von $\mathbf{R}^d$ mit zugehörigen orthogonalen Projektoren $Q_1^\pm, \cdots, Q_r^\pm$, so daß*

$$\lim_{t\to\pm\infty} [v_t^*\, v_t]^{\frac{1}{2|t|}} = \sum_{i=1}^d e^{\pm\lambda_i} Q_i^\pm.$$

(ii) Es gibt ferner eine $(\theta_t)_{t\in\mathbf{R}}$-invariante 1-Menge Ω_0, so daß mit der Bezeichnung

$$V_i^+ = U_i^+ \otimes \cdots \otimes U_r^+, \quad 1 \le i \le r+1,$$

$$V_i^- = U_1^- \otimes \cdots \otimes U_i^-, \quad 0 \le i \le r,$$

für $\omega \in \Omega_0, 1 \le i \le r$, *gilt*

$$\begin{aligned}
\lambda_i &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln ||v_t(\omega)\, x|| \Leftrightarrow x \in V_i^+(\omega) \setminus V_{i+1}^+(\omega),\\
\lambda_i &= \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{t} \ln ||v_t(\omega)\, x|| \Leftrightarrow x \in V_i^-(\omega) \setminus V_{i-1}^-(\omega),\\
\lambda_i &= \lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{t} \ln ||v_t(\omega)\, x|| \Leftrightarrow x \in V_i^+(\omega) \cap V_i^-(\omega) = E_i(\omega).
\end{aligned}$$

$E_i(\omega)$ *ist* d_i*-dimensional, und es gelten die Invarianzeigenschaften*

$$V_i^+(\theta_t\omega) = v_t(\omega)\, V_i^+(\omega), \quad V_i^-(\theta_t\omega) = v_t(\omega)\, V_i^-(\omega), \quad E_i(\theta_t\omega) = v_t(\omega)\, E_i(\omega),$$

$1 \le i \le r$.

$\lambda_i, 1 \le i \le r$, heißen *Lyapunov-Exponenten*, $E_i, 1 \le i \le r$, *Oseledets-Räume.*

Im Gegensatz zu ihrem deterministischen Pendant sind Oseledets-Räume schwer zugänglich, und nur in ein paar einfachen Fällen explizit berechenbar. Wir wollen uns nach dem Zusammenhang zwischen algebraischen Eigenschaften der Matrizen $A_j, 0 \le j \le m$, und der Verteilung der Oseledets-Räume fragen.

3 Die Verteilung der Oseledets-Räume

Wie der stochastische Variationskalkül zur Beantwortung dieser Frage angewandt werden kann, soll zunächst am Modellfall von v_t selbst demonstriert werden.

3.1 Der lineare Fluß

Wir wollen Bedingungen herleiten, unter denen die Verteilung von v_t absolutstetig bzgl. des Lebesguemaßes λ auf $\mathbf{R}^{d\times d}$ ist, für $t > 0$. Nach Theorem 1.4 ist zu zeigen, daß die Malliavin-Matrix f.s. positive Determinante hat. Wir berechnen zunächst die Malliavin-Ableitung von $v_t, t \ge 0$.

Nach Theorem 1.6 gilt für $1 \le j \le m, 0 \le s \le t$

$$\begin{aligned}
D_s^j v_t &= A_j\, v_s + \sum_{i=1}^m \int_s^t A_i\, D_s^j v_r \circ dW_r^j + \int_s^t A_0\, D_s^j v_r\, dr,\\
D_s^j v_s &= A_j.
\end{aligned}$$

Diese Gleichung entspricht (5), wird also gelöst durch

$$v_{t-s}(\theta_s)\, A_j v_s = v_t\, v_s^{-1}\, A_j\, v_s.$$

Mit der Bezeichnung

$$A_j^{s,t} = v_t\, v_s^{-1}\, A_j\, v_s\, v_t^{-1}, \quad s \le t,$$

erhalten wir also

Lemma 3.1 *Sei $t \geq 0, p \geq 2, k \in \mathbf{N}$. Dann gilt $v_t \in \mathcal{D}_k^p$ und für $0 \leq s \leq t, 1 \leq j \leq m$,*

$$D_s^j v_t \; v_t^{-1} = A_j^{s,t}.$$

Nun zur Positivität der Malliavin-Determinante. Wir erinnern daran, daß wir mit $(.,.)$ das Euklidische Skalarprodukt in jeder Dimension, und mit $\langle .,. \rangle$ das Skalarprodukt in $L^2(\mathbf{R})$ bezeichnen. $\sum_{j=1}^m \langle D^j F, D^j G \rangle$ kürzen wir ab durch $\langle DF, DG \rangle$.

Lemma 3.2 *Für ein $p \geq 2$ sei $F = (F^1, \cdots, F^d) \in \mathcal{D}_1^p$. Dann gilt $\det(\langle DF^i, DF^j \rangle)_{1 \leq i,j \leq d} > 0$ $\mathbf{P}$-f.s. genau dann, wenn*

$$\inf_{w \in \mathbf{R}^d, |w|=1} \sum_{j=1}^m \int_0^\infty (D_s^j F, w)^2 ds > 0$$

$\mathbf{P}$-f.s..

Beweis:
Wir nehmen $m = 1$ an, und bemerken, daß det genau dann positiv ist, wenn der kleinste Eigenwert positiv ist. Nun ist aber $\lambda \in \mathbf{R}$ kleinster Eigenwert der Matrix $\langle DF^i, DF^j \rangle_{1 \leq i,j \leq d}$ genau dann, wenn gilt

$$\lambda = \inf_{w \in \mathbf{R}^d, |w|=1} \sum_{i,j=1}^d w_i \, \langle DF^i, DF^j \rangle \, w_j = \inf_{w \in \mathbf{R}^d, |w|=1} \sum_{j=1}^m \int_0^\infty (D_s^j F, w)^2 ds.$$

•

Diese Aussage wenden wir nun an auf $F = v_t$ für $t > 0$. In $\mathbf{R}^{d \times d}$ kann das Euklidische Skalarprodukt geschrieben werden als $(v, w) = \mathrm{sp}(vw)$, $v, w \in \mathbf{R}^{d \times d}$. Lemma 3.1 und Lemma 3.2 ergeben mit Theorem 1.4

Lemma 3.3 *Für alle $0 \neq w \in \mathbf{R}^{d \times d}$ gelte*

$$\sum_{j=1}^m \int_0^t sp(v_s^{-1} \, A_j \, v_s \; w)^2 ds > 0$$

$\mathbf{P}$-f.s.. Dann ist die Verteilung von v_t absolutstetig bzgl. λ auf $\mathbf{R}^{d \times d}$.

Beweis:
Es handelt sich um eine pfadweise Aussage. Die Abbildung

$$w \mapsto \sum_{j=1}^m \int_0^t \mathrm{sp}(v_s^{-1} \, A_j \, v_s \; w)^2 ds$$

nimmt wegen Stetigkeit ihr Minimum auf der Einheitssphäre in $\mathbf{R}^{d \times d}$ an. Verwende Theorem 1.4. •

Wir prüfen nun das Kriterium von Lemma 3.3 indirekt nach.

Sei $w \in \mathbf{R}^{d\times d}$ mit $\sum_{j=1}^m \int_0^t \mathrm{sp}(v_s^{-1}\, A_j\, v_s\; w)^2 ds = 0$. Dann gilt für $1 \le j \le m$ und $0 \le s \le t$ auch

$$\mathrm{sp}(v_s^{-1}\, A_j\, v_s\; w) = 0, \quad \text{also auch} \quad \mathrm{sp}(A_j\, w) = 0.$$

Nun ist der Prozeß $v_s^{-1}\, A_j\, v_s$ ein Semimartingal, dessen kanonische Zerlegung die Itô-Formel aus (3) und (4) liefert. Der Martingalanteil ist demnach

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^m \int_0^s v_u^{-1}[-A_i\, A_j + A_j\, A_i]\, v_u\, dW_u^i \\ &\quad = \sum_{i=1}^m \int_0^s v_u^{-1}[A_j, A_i]\, v_u\, dW_u^i, \end{aligned}$$

wobei wir die Lie-Klammer mit $[.,.]$ bezeichnen. Der Anteil von beschränkter Variation wird entsprechend

$$\begin{aligned} &\int_0^s v_u^{-1}\, [-A_0\, A_j + A_0\, A_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m [A_i^2\, A_j + A_j\, A_i^2 - 2A_i\, A_j\, A_i]\, v_u\, du \\ &\quad = \int_0^s v_u^{-1}\, ([A_j, A_0] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m [[A_j, A_i], A_i])\, v_u\, du. \end{aligned}$$

Also folgt für $1 \le i, j \le m$

$$\mathrm{sp}([A_j, A_i]\, w) = 0, \quad \mathrm{sp}(([A_j, A_0] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m [[A_j, A_i], A_i])\, w) = 0.$$

Iteriert man dieses Verfahren, so erhält man offenbar mit

$$\begin{aligned} \mathcal{I}'_0 &= \{A_1, \cdots, A_m\}, \\ \mathcal{I}'_n &= \{[A_j, V], [A_0, V] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m [A_i, [A_i, V]] : V \in \mathcal{I}'_{n-1}\}, \\ \mathcal{I}' &= \mathrm{span} \cup_{n\ge 0} \mathcal{I}'_n : \end{aligned}$$

$w \notin \mathcal{I}'$. Ist schließlich

$$\mathcal{I} = \mathrm{span}\{A_1, \cdots, A_m, [A_{i_p}, [A_{i_{p-1}}, \cdots, [A_{i_1}, A_{i_0}] \cdots] : 0 \le i_j \le m\},$$

so gilt offenbar $\mathcal{I}' = \mathcal{I}$. Damit folgt ein Teil des Theorems von Hörmander in der gegebenen Situation.

Theorem 3.1 *Gilt $\mathcal{I} = \mathbf{R}^{d\times d}$, so ist $\mathbf{P}\circ v_t^{-1} \ll \lambda$. Das Maß $\mathbf{P}\circ v_t^{-1}$ hat eine C^∞-Dichte bzgl. λ.*

Beweis:
Den ersten Teil impliziert Lemma 3.3 nach den obigen Bemerkungen. Den zweiten Teil können wir nicht beweisen. Siehe z.B. Nualart [19]. •

3.2 Flüsse auf Grassmann-Mannigfaltigkeiten

Was können wir mit der oben skizzierten Methode über die Verteilungen der Oseledets-Räume aussagen? Wir haben $E_i = V_i^+ \cap V_i^-$, wobei die zufälligen linearen Räume V_i^+, V_i^- charakterisiert sind durch

$$x \in V_i^+ \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln ||v_t\, x|| \le \lambda_i, \tag{8}$$
$$x \in V_i^- \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{t} \ln ||v_t\, x|| \ge \lambda_i$$

(vgl. Theorem 2.3). Wegen der Unabhängigkeit von W auf $\mathbf{R}_+$ und $\mathbf{R}_-$ sind die $+$-Räume von den $-$-Räumen unabhängig. Statt zufälliger linearer Räume betrachten wir nun zufällige orthogonale Projektoren. Seien also Q_i, P_i, R_i die orthogonalen Projektoren auf $V_i^+, V_i^-, E_i, 1 \le i \le r$. Zur Untersuchung der Verteilung der R_i gehen wir so vor. Wir untersuchen zunächst die Verteilung der P_i, Q_i. Wegen deren Unabhängigkeit kann man dann aus der Glattheit der Verteilungen der P_i, Q_i mit einem rein analytischen Argument die Glattheit der Verteilungen der R_i erschließen. Aus Symmetriegründen genügt es, sich auf die Q_i zu konzentrieren. Wir fixieren nun i, nehmen an, daß Q_i seine Werte in der Grassmann-Mannigfaltigkeit $M = G_k(d)$ der k-dimensionalen linearen Unterräume von $\mathbf{R}^d$ annimmt, und lassen der Einfachheit halber den Index i weg.

Um $\mathbf{P} \circ Q^{-1}$ zu untersuchen, ordnen wir Q einen Fluß von Diffeomorphismen $(P_t)_{t\in\mathbf{R}}$ auf M zu, deren "invarianter" Zustand Q ist. Dann argumentieren wir so: unter Hörmander-Bedingungen an die den Fluß erzeugenden Vektorfelder wird sich mit Argumenten wie in 3.1. $\mathbf{P} \circ P_t^{-1}$ als absolutstetig bzgl. des Riemannschen Volumens auf M erweisen. Diese Glattheit überträgt sich dann auf den invarianten Zustand Q. Den Fluß von Diffeomorphismen auf M erhalten wir durch eine kanonische *polare Zerlegung* von $v_t\, p$, für $p \in M, t \in \mathbf{R}$, die wir zunächst diskutieren.

Dazu beschreiben wir M als eingebettete Mannigfaltigkeit

$$G_k(d) = \{p : p \in \mathbf{R}^{d\times d}, \mathrm{rk}\ p = k, p^2 = p, p^* = p\} = \{o\, p_k\, o^* : o \in O(d)\},$$

wobei für die letztere Beschreibung bzgl. der kanonischen Basis $(e_1, \cdots, e_d)$ des $\mathbf{R}^d$ p_k derjenige orthogonale Projektor sei, der die ersten k Basisvektoren identifiziert, und die übrigen annuliert.

Lemma 3.4 *Sei $A \in Gl(d;\mathbf{R}), p \in M$. Dann gibt es genau ein Paar (q, B) linearer Operatoren auf $\mathbf{R}^d$ mit $q \in M, B \in Gl(d;\mathbf{R})$, so daß die Gleichungen*

$$A\, p = q\, B, \quad (I - q)\, A = B\, (I - p), \quad A\, p = B\, p$$

gelten.

Beweis:
1. Existenz:
Sei q der orthogonale Projektor auf $\mathrm{rg}(A\, p)$,

$$B = q\, A\, p + (I - q)\, A\, (I - p).$$

Daraus ergeben sich sofort die behaupteten Gleichungen. Sei

$$C = p\,A^{-1}\,q + (I-p)\,A^{-1}\,(I-q).$$

Dann gilt wegen $(I-p)\,A^{-1}\,q = 0$ die Gleichung $CB = I$, also $B \in Gl(d;\mathbf{R})$.
2. Eindeutigkeit:
Sei (q', B') ein Paar mit den angegebenen Eigenschaften. Dann gilt zunächst

$$q'(\mathbf{R}^d) = q'\,B'(\mathbf{R}^d) = q\,B(\mathbf{R}^d) = q(\mathbf{R}^d)$$

und damit $q' = q$. Damit folgt

$$B\,p = A\,p = B'\,p, \quad B\,(I-p) = (I-q)\,A = B'\,(I-p),$$

womit sich $B = B'$ ergibt. •

Das Paar von linearen Operatoren gemäß Lemma 3.4 nennen wir *polare Zerlegung* von $A\,p$. Wir bemerken, daß die polare Zerlegung die Zerlegung von $A\,x$ für $x \in \mathbf{R}^d$ in Polarkoordinaten verallgemeinert.

Auf der *Flußebene* haben wir damit das gewünschte Objekt gefunden: wir bezeichnen mit (P_t, R_t) die polare Zerlegung von $v_t\,p$ für $p \in M, t \in \mathbf{R}$. Unser Plan sieht nun vor, die Verteilung von Q über die von P_t zu untersuchen. Dazu müssen wir jedoch auch wissen, wie P und v auf der *Erzeugerebene* zusammenhängen. Wie verhalten sich also Vektorfelder bei der polaren Zerlegung?

Lemma 3.5 *Sei $A \in Gl(d;\mathbf{R}), p \in M$, $0 \in I \subset \mathbf{R}$ ein offenes Intervall und $(A_t)_{t\in I}$ eine glatte Kurve durch $A_0 = A$ mit Tangentialvektor $\dot{A}$. Dann induziert die polare Zerlegung von $(A_t p)_{t\in I}$ glatte Kurven $(q_t)_{t\in I}$ in M, und $(B_t)_{t\in I}$ in $Gl(d;\mathbf{R})$ durch $q = q_0$ bzw. $B = B_0$. Die Tangentialvektoren $\dot{q}$ und $\dot{B}$ bei 0 genügen den Gleichungen*

$$\dot{q} = (I-q)\,\dot{A}A^{-1}\,q + q\,(\dot{A}A^{-1})^*\,(I-q), \tag{9}$$

$$\dot{B}B^{-1} = (I-q)\,\dot{A}A^{-1}\,q - q\,(\dot{A}A^{-1})^*\,(I-q) + q\,\dot{A}A^{-1}\,q + (I-q)\,\dot{A}A^{-1}\,(I-q). \tag{10}$$

Beweis:
Da $Gl(d;\mathbf{R})$ eine Liegruppe ist, können wir annehmen $A_0 = B_0 = I, q_0 = p$.
1. Aus $q^2 = q, q^* = q$ folgt $\dot{q} = \dot{q}\,p + p\,\dot{q}$, und damit $(I-p)\,\dot{q}\,(I-p) = p\,\dot{q}\,p = 0$, folglich

$$\dot{q} = (I-p)\,\dot{q}\,p + p\,\dot{q}\,(I-p).$$

Aus Lemma 3.4 folgt ferner $\dot{q} + p\,\dot{B} = \dot{A}\,p$. Also

$$(I-p)\,\dot{q}\,p = (I-p)\,\dot{A}\,p,$$

woraus sich die erste Gleichung herleitet.
2. Wegen $B_t = q_t\,A_t\,p + (I-q_t)\,A_t\,(I-p)$ gilt

$$\begin{aligned}
\dot{B} &= \dot{q}\,[p-(I-p)] + p\,\dot{A}\,p + (I-p)\,\dot{A}\,(I-p) \\
&= (I-p)\,\dot{A}\,p - p\,\dot{A}^*\,(I-p) + p\,\dot{A}\,p + (I-p)\,\dot{A}\,(I-p).
\end{aligned}$$

Damit folgt die zweite Gleichung. •

Lemma 3.5 legt die Betrachtung der folgenden Vektorfelder nahe. Für $A \in \mathbf{R}^{d\times d}, p \in M$ sei

$$\begin{aligned} h_A(p) &= (I-p)\,A\,p + p\,A^*\,(I-p), \\ g_A(p) &= (I-p)\,\dot{A}\,p - p\,\dot{A}^*\,(I-p) + p\,\dot{A}\,p + (I-p)\,\dot{A}\,(I-p). \end{aligned}$$

Dann lassen sich die Formeln von Lemma 3.5 so schreiben:

$$\dot{q} = h_{\dot{A}\,A^{-1}}(q), \tag{11}$$

$$\dot{B}\,B^{-1} = g_{\dot{A}\,A^{-1}}(q). \tag{12}$$

Beachtet man nun, daß aus (3) folgt

$$dv_t\,v_t^{-1} = \sum_{j=1}^m A_j \circ dW_t^j + A_0\,dt,$$

so ergibt sich insgesamt aus Lemma 3.5, daß die Prozesse $(P_t)_{t\in\mathbf{R}}$ und $(R_t)_{t\in\mathbf{R}}$ den stochastischen DGL

$$\begin{aligned} dP_t &= \sum_{j=1}^m h_{A_j}(P_t) \circ dW_t^j + h_{A_0}(P_t)\,dt, \\ P_0 &= p, \\ dR_t &= \sum_{j=1}^m g_{A_j}(P_t)\,R_t \circ dW_t^j + g_{A_0}(P_t)\,R_t\,dt, \\ R_0 &= I \end{aligned}$$

genügen.

Zu $(P_t)_{t\in\mathbf{R}}$ gehört nach Verallgemeinerung der Ergebnisse von Abschnitt 2 auf kompakte Mannigfaltigkeiten ein Fluß von Diffeomorphismen auf M, den wir mit demselben Symbol belegen. Der zufällige Projektor Q ist in der Tat der "invariante" Zustand des Flusses P.

Theorem 3.2 *Sei $(\hat{P}_t, \hat{R}_t)$ die polare Zerlegung von $v_t\,Q$ für $t \in \mathbf{R}$. Dann gilt*

$$\hat{P}_t = Q(\theta_t),$$

$t \in \mathbf{R}$. *Insbesondere ist die Verteilung ρ von Q identisch mit der Verteilung von $(\omega, p) \mapsto P_t(\omega)\,p$ unter $\mathbf{P} \otimes \rho$.*

Beweis:
Wegen der Kozykeleigenschaft gilt für $x \in \mathbf{R}^d$

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{s} \ln ||v_{s-t}(\theta_t)\,x|| \leq \lambda_i \Leftrightarrow \lim_{s\to\infty} \frac{1}{s}\, \ln ||v_s\,v_t^{-1}\,x|| \leq \lambda_i$$

und damit nach Definition von Q (siehe (8)) die Gleichung

$$v_t\, Q(\mathbf{R}^d) = Q(\theta_t)(\mathbf{R}^d)$$

für $t \in \mathbf{R}$. Also folgt

$$\hat{P}_t(\mathbf{R}^d) = \hat{P}_t\, \hat{R}_t(\mathbf{R}^d) = Q(\theta_t)(\mathbf{R}^d),$$

und damit schließlich $\hat{P}_t = Q(\theta_t), t \in \mathbf{R}$. Da $\mathbf{P}$ invariant bzgl. θ_t ist, folgt der Rest. •

Als Konsequenz von Theorem 3.2 kann die Verteilung von Q vermöge der Verteilungen von P_t studiert werden. Zu diesem Zweck müssen wir noch die Argumente von Abschnitt 3.1. auf kompakte Mannigfaltigkeiten wie M verallgemeinern.

3.3 Die Glattheit der Verteilung der Oseledets-Räume

Lemma 3.6 *Für $t \geq 0, p \geq 2, k \in \mathbf{N}$ ist $P_t, R_t \in \mathcal{D}_k^p$, und für $0 \leq r \leq t, 1 \leq j \leq m$ gilt*

$$D_r^j P_t = h_{A_j^{r,t}}(P_t), \quad D_r^j R_t\, R_t^{-1} = g_{A_j^{r,t}}(P_t).$$

Beweis:
Nach Lemma 3.1 ist $D_r^j v_t\, v_t^{-1} = A_j^{r,t}$. Wende Lemma (3.5) an. •

Lemma 3.7 *Für $p \geq 2, k \in \mathbf{N}$ gilt $Q \in \mathcal{D}_k^p$ und für $0 \leq r, 1 \leq j \leq m$*

$$D_r^j Q = -h_{A_j^{r,0}}(Q).$$

Beweis:
Nach Crauel [7] und Le Jan [15] gilt

$$Q = \lim_{t \to \infty} P_{-t}(\theta_t),$$

und wegen der Kozykeleigenschaft $v_t^{-1} = v_{-t}(\theta_t)$. Ferner gilt nach Lemma 3.1

$$D_r^j v_t^{-1}\, v_t = -v_t^{-1}\, D_r^j v_t = -A_j^{r,0}.$$

Damit können wir Lemma 3.6 auf die polare Zerlegung $(P_{-t}(\theta_t), R_{-t}(\theta_t))$ von $v_{-t}(\theta_t)\, p = v_t^{-1}\, p$ anwenden. Es ergibt

$$D_r^j[P_{-t}(\theta_t)] = -h_{A_j^{r,0}}(P_{-t}(\theta_t)).$$

Lasse darin $t \to \infty$ gehen. Die Konvergenz findet offenbar in $\mathcal{D}_k^p$ statt. •

Nun sind wir in der Lage, die Argumente von 3.1. statt auf $\mathbf{R}^{d \times d}$ auf M durchzuführen. Wir müssen zunächst beachten, daß wir statt einer Malliavin-Matrix im Euklidischen eine Bilinearform auf dem Dual des Tangentialbündels von M erhalten. Dann können wir, von Lemma 3.6 ausgehend, die Positivität der Bilinearform auf dem Bündel wie in 3.1. durch eine Eigenwertbedingung ausdrücken (vgl. Lemma 3.3). Diese führt (evtl.

durch Wahl lokaler Koordinaten auf M) zu der Vollheitsbedingung für die von den Vektorfeldern $h_{A_j}, 0 \leq j \leq m$, aufgespannte Lie-Algebra bzw. das von $A_j, 1 \leq j \leq m$, darin erzeugte Ideal. Setzt man diese voraus, so erkennt man wie oben, daß dann $\mathbf{P} \circ P_t^{-1}$ eine Dichte bzgl. des Riemannschen Volumens auf M hat. Beim Uebergang von P_t zu Q nutzen wir die Invarianzeigenschaft von Theorem 3.2 aus.

Wir beschreiben schließlich etwas ausführlicher die Resultate.

Sei $\mathcal{L}^k$ die von $h_{A_0}, \cdots, h_{A_m}$ erzeugte Lie-Algebra,

$$\mathcal{I}^k = \operatorname{span}\{h_{A_1}, \cdots, h_{A_m}, [h_{A_{i_p}}, [h_{A_{i_{p-1}}}, [\cdots [h_{A_{i_1}}, h_{A_{i_0}}] \cdots] : 0 \leq i_j \leq m\}.$$

Theorem 3.3 *Es gelte $\mathcal{I}_p^k = T_pM, p \in M$. Dann hat die Verteilung von Q eine C^∞-Dichte bzgl. des Riemannschen Volumens auf M.*

Wegen der speziellen Struktur der Grassmann-Mannigfaltigkeiten können wir zeigen (siehe [11]), daß außer in Trivialfällen die Vollheit von $\mathcal{I}^k$ und von $\mathcal{L}^k$ äquivalent sind. Daher können wir Theorem 3.3 noch verschärfen.

Theorem 3.4 *Es gelte $\mathcal{L}_p^k = T_pM, p \in M$. Dann hat die Verteilung von Q eine C^∞-Dichte bzgl. des Riemannschen Volumens auf M.*

Kehren wir nun abschließend zum eigentlichen Gegenstand unseres Interesses zurück, den Projektoren R_i auf die Oseledets-Räume des betrachteten linearen Kozykels (3). Gehen wir von glatten P_i, Q_i aus, und beachten wir deren Unabhängigkeit, so liefert ein rein analytisches Argument, das auf der Ko-Flächenformel von Federer [8] basiert, das folgende Hauptergebnis (siehe [11]).

Theorem 3.5 *Für $1 \leq k \leq d$ und $p \in G_k(d)$ gelte $\mathcal{L}_p^k = T_pG_k(d)$. Dann hat die Verteilung von $(R_1, \cdots, R_r)$ eine C^∞-Dichte bzgl. des Riemannschen Volumens auf $G_{d_1}(d) \times \cdots \times G_{d_r}(d)$.*

Wir bemerken, daß nach einem Ergebnis von Goldsheid und Margulis [9] aus den Voraussetzungen von Theorem 3.5 schon folgt, daß $d_1 = \cdots = d_r = 1$ und $r = d$ ist.

3.4 Ausblick und eine Anwendung

Die in 3.3. diskutierten Glattheitsaussagen für die Oseledets-Räume sind interessant für die folgende Anwendung.

Aus dem multiplikativen Ergodensatz folgt, daß die invarianten Projektoren der *Vorwärtsfahne* $Q_i, 1 \leq i \leq r$, meßbar sind bzgl. $\mathbf{F}_0^\infty$, während die der *Rückwärtsfahne* $P_i, 1 \leq i \leq r$, bzgl. $\mathbf{F}_{-\infty}^0$ meßbar sind. Daraus folgt, daß die Oseledets-Räume selbst i.a. nur $\mathbf{F}$-meßbar sind. In den vielen Problemen der multiplikativen Ergodentheorie, in denen die Oseledets-Räume eine Rolle spielen, steht die Behandlung mit Methoden des klassischen Itô-Kalküls daher vor einem schwierigen Problem: mit den $R_i, 1 \leq i \leq r$, treten nicht adaptierte Prozesse auf.

Eine Möglichkeit, diese Schwierigkeit zu beseitigen, bietet die Technik des *grossissement de filtrations*. Man vergrößert die Filtration des Wienerprozesses zu jedem Zeitpunkt mit der in $R_i, 1 \leq i \leq r$, vorhandenen Information. Bleibt bei diesem Übergang die Semimartingal-Eigenschaft erhalten, so kann man über die vergrößerte Filtration in den Itô-Kalkül zurückkehren. Nach einem Resultat von Jacod [13] ist dies der Fall, sofern die regulären bedingten Verteilungen der $R_i, 1 \leq i \leq r$, absolutstetig bzgl. eines gemeinsamen Referenzmaßes sind. Als ein solches Referenzmaß bietet sich das Riemannsche Volumen auf den entsprechenden Grassmann-Mannigfaltigkeiten an. In der Tat können wir mit einer Version von Theorem 3.5 für reguläre bedingte Verteilungen, das unter denselben Hörmander-Bedingungen gültig ist, das Kriterium von Jacod verifizieren (siehe [11]).

Der Ansatz von 3.2. und 3.3. erlaubt ein tiefergehendes Studium der Verteilungen der Oseledets-Räume und asymptotischer Eigenschaften zufälliger dynamischer Systeme. Mit Hilfe des Malliavin-Kalküls ergeben sich z.B. Zusammenhangseigenschaften des Trägers, Kriterien für die Positivität der Dichte und ihre Flachheit bei Nullstellen (siehe [12]). Er erwies sich als nützlich bei der Beschreibung aller Lyapunov-Exponenten eines linearen Systems durch ergodische Mittel im Sinne von Furstenberg und Khasminskii (siehe [2]), und verspricht einen Zugang zur Beschreibung der Rotationszahlen in ähnlicher Weise.

Literatur

[1] **Arnold, L. Random dynamical systems. In Vorbereitung. Institut für Dynamische Systeme, Universität Bremen (1997).**

[2] Arnold, L., Imkeller, P. *Furstenberg-Khasminskii formulas for Lyapunov exponents via anticipative calculus.* Stochastics and Stochastics Reports 54 (1995), 127-168.

[3] Arnold, L., Scheutzow, M. *Perfect cocycles through stochastic differential equations.* Prob. Th. Rel. Fields 101 (1995), 65-88.

[4] Bell, D. *The Malliavin calculus.* Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Math. 34. Longman and Wiley: 1987.

[5] **Bouleau, N., Hirsch, F. Dirichlet forms and analysis on Wiener space. W. de Gruyter, Berlin 1991.**

[6] Bismut, J. M. *Large deviations and the Malliavin calculus.* Progress in Mathematics, vol. 45. Birkhäuser: Basel 1984.

[7] Crauel, H. *Markov measures for random dynamical systems.* Stochastics and Stochastics Reports 37 (1991), 153-173.

[8] Federer, H. *Geometric measure theory.* Springer: Berlin 1969.

[9] Goldsheid, I. Y., Margulis, G. A. *Lyapunov indices of a product of random matrices.* Russ. Math. Surveys 44 (1989), 11-71.

[10] Ikeda, N., Watanabe, S. *Stochastic differential equations and diffusion processes.* North Holland (2 nd edition): 1989.

[11] Imkeller, P. *The smoothness of laws of random flags and Oseledets spaces of linear stochastic differential equations.* Erscheint in "Potential Analysis" (1997).

[12] Imkeller, P. *Some support properties of the laws of invariant spaces of stochastic differential equations.* Preprint, Humboldt-Universität Berlin (1997).

[13] Jacod, J. *Grossissement initial, hypothèse (H'), et théorème de Girsanov.* in: Grossissements de filtrations: exemples et applications. T. Jeulin, M.Yor (eds.). LNM 1118. Springer: Berlin 1985.

[14] **Kunita, H. Stochastic flows and stochastic differential equations. Cambridge University Press: Cambridge 1990.**

[15] Le Jan, Y. *Equilibre statistique pour les produits de difféomorphismes aléatoires indépendants.* Ann. Inst. H. Poincaré 23 (1987), 111-120.

[16] **Malliavin, P. Integration and Probability. Springer: Berlin 1995.**

[17] Malliavin, P. *Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators.* Proc. Intern. Symp. SDE Kyoto, 1976, 195-263. Kinokynia: Tokyo 1978.

[18] Malliavin, P. *C^k-hypoellipticity with degeneracy.* Stochastic Analysis. ed: A. Friedman and M. Pinsky, 199-214, 327-340. Acad. Press: New York 1978.

[19] **Nualart, D. The Malliavin calculus and related topics. Springer: Berlin 1995.**

[20] **Nualart, D. Analysis on Wiener space and anticipative stochastic calculus. Kurs Ecole d'Eté de Probabilités 1996.**

[21] Stroock, D. W. *The Malliavin Calculus. Functional Analytic Approach.* J. Funct. Anal. 44 (1981), 212-257.

[22] Stroock, D. W. *The Malliavin calculus and its applications to second order parabolic differential equations.* Math. Systems Theory, Part I, 14 (1981), 25-65, Part II, 14 (1981), 141-171.

[23] Stroock, D. W. *Some applications of stochastic calculus to partial differential equations.* In: Ecole d'Eté de Probabilité de St Flour. LNM 976 (1983), 267-382.

[24] Taniguchi, S. *Malliavin's stochastic calculus of variations for manifold valued Wiener functionals.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 65 (1983), 269-290.

[25] Watanabe, S. *Stochastic differential equations and Malliavin calculus.* Tata Institut of Fundamental Research. Springer: Berlin 1984.